

11 12 568  
UNIVERSITATEA „ALEXANDRU IOAN CUZA” IAȘI  
FACULTATEA DE FIZICĂ  
CATEDRA DE OPTICĂ-SPECTROSCOPIE

Gh.N. Singurel

# FIZICA LASERILOR

Ediție revăzută și adăugită



134208  
B.C.U. - IASI

EDITURA UNIVERSITĂȚII „ALEXANDRU IOAN CUZA”  
IAȘI – 2001

### Referenți:

Prof. Dr. **Mihai TOMA** – Facultatea de Fizică

Prof. Dr. **Mitachi STRAT** – Facultatea de Fizică

Prof. Dr. **Mihai DELIBAȘ** – Facultatea de Fizică

Autorul exprimă mulțumiri referenților pentru efortul depus și mai ales pentru observațiile utile efectuate.

## I. TEORIA CLASICĂ A CÂMPULUI ELECTROMAGNETIC AL RADIAȚIEI OPTICE

1. Ecuatiile lui Maxwell	1
2. Radiația <i>em</i> emisă de către un ansamblu de sarcini electrice	6
3. Unde electromagnetice ( <i>em</i> )	10
4. Modelul de dipol electric	13
4.1 Perturbare momentană	18
4.2 Momentul de dipol electric al unui sistem aflat în câmp <i>em</i>	21
5. Radiația de dipol electric	27
6. Mărimi caracteristice ale radiației <i>em</i> optice	30
7. Structura spectrală a semnalelor <i>em</i>	34
7.1 Câmpul <i>em</i> emis de către un dipol electric liber amortizat	34
7.2 Câmpul <i>em</i> de durată finită	36

## II. CÂMPUL RADIAȚIEI OPTICE

1. Caracteristici geometrice	40
2. Structura spectrală	41
3. Coerența temporală și spațială a radiației optice	47
3.1 Interferența a două fascicule de radiație optică cu frecvențe diferite	47
3.2 Spectroscopie interferențială	51
3.3 Funcția de autocorelare	62
3.3.2 Funcția de autocorelare pentru radiația termică	66
3.3.2.1 Funcția de autocorelare și cea de distribuție spectrală pentru câteva modele de surse termice	68
3.3.3 Definirea timpului de coerență și lățimea spectrală	77



3.4 Coerența transversală	78
3.4.1 Cazul unei distribuții continue de surse	83
3.4.2 Distribuția spectrală a câmpului de radiație	85
3.4.3 Utilizarea transformatelor Fourier	88
3.5 Lungimea de coerență transversală	92
3.6 Intensitatea fluctuațiilor în spectroscopia interferențială	97
3.6.1 Interferometru cu corelarea intensității fluctuațiilor	97
3.6.2 Expresia mărimii $\langle \delta I_1(t) \delta I_2(t - \tau) \rangle$ în cazul radiației termice monocromatice	99
3.6.3 Extinderea la valori mari ale timpului de mediere	100
3.6.4 Experimente	101
3.6.5 Considerații cuantice	101
3.6.6 Considerații asupra zgomotului	105
3.6.7 Parametru de degenerare	106
4. Starea de polarizare a radiației optice	107
4.1 Modele elementare ale radiației polarizate	107
4.2 Radiația polarizată eliptic reprezentată ca o suprapunere de componente polarizate circular	112
4.3 Radiația nepolarizată	114
4.4 Măsurători elementare asupra stării de polarizare a unui fascicul de radiație optică	122
4.5 Matricea de coerență	123
4.5.1 Determinarea valorii elementelor matricii de coerență	124
4.6 Expresia matricii de coerență pentru câteva tipuri de radiație optică polarizată	125
4.7 Compunerea a două fascicule de radiație necoerente	128
4.8 Radiația polarizată parțial exprimată ca o suprapunere de radiație nepolarizată și polarizată eliptic	131
4.9 Caracterizarea experimentală a unui fascicul de radiație polarizată parțial	135
III. PROPAGAREA RADIAȚIEI OPTICE PRIN MEDIUL MATERIAL	137
1. Ecuațiile Maxwell într-un mediu material	137
2. Susceptibilitatea electrică a ansamblului de sisteme atomice	140
IV. MECANISME DE LĂȚIRE A STRUCTURII SPECTRALE A CÂMPULUI <i>em</i> EMIS DE CĂTRE UN ANSAMBLU DE DIPOLI ELECTRICI	147
1. Ansamblu format din dipoli electrici liberi	147
2. Ansamblu format din dipoli electrici	

care pot interacționa prin ciocniri	148
2.1 Structura spectrală a câmpului <i>em</i> emis de către acest ansamblu	148
2.2 Interacțiunea cu radiația optică a ansamblului de dipoli electrici supuși ciocnirilor	150
2.3 Polarizația ansamblului de dipoli supus procesului de ciocnire	154
3. Lărgirea Doppler a structurii spectrale a câmpului <i>em</i> emis de către un ansamblu de dipoli electrici	158
3.1 Structura spectrală a câmpului <i>em</i> emis de către ansamblu	158
3.2 Interacțiunea câmpului <i>em</i> cu ansamblul de dipoli care prezintă efect Doppler	161
4. Conturul spectral de tip Voigt	163
V. CARACTERISTICI CUANTICE ALE SISTEMELOR ATOMICE	168
1. Nivelurile de energie ale sistemelor atomice și lățimea energetică a acestora	168
2. Probabilitatea tranzițiilor spontane și forțate	171
2.1 Fenomenul de emisie spontană	171
2.2 Fenomene forțate	174
3. Relațiile dintre coeficienții Einstein	173
3.1 Coeficienții Einstein diferențiali	175
4. Timpul de viață al stărilor excitate	175
5. Distribuția sistemelor atomice în lățimea energetică a nivelului	178
6. Distribuția densității populației pe nivelurile energetice în cazul ansamblului de sisteme atomice aflat în echilibru termodinamic	180
7. Corespondența dintre modelul clasic de dipol electric și cel cuantic	183
8. Mecanisme de modificare a lățimii energetice a nivelurilor energetice și a lățimii spectrale a tranziției; lățirea determinată de ciocnirile sistemelor atomice ale ansamblului	185
8.1 Lățirea determinată de "timpul de tranzit"	198
VI. INTERACȚIUNEA RADIAȚIEI OPTICE CU ANSAMBLUL DE SISTEME ATOMICE	202
1. Propagarea radiației optice prin ansamblul de sisteme atomice	202
1.1 Secțiunea transversală de absorbție; tăria oscilatorului	207
1.2 Temperatura absolută negativă	208
2. Interacțiunea câmpului <i>em</i> al RCN cu ansamblul de sisteme atomice	211
2.1 Densitatea spectrală de energie a RCN	211
2.2 Tranziții stimulate de către RCN	212
2.3 Echilibrul termic dintre ansamblu de sisteme atomice și RCN	213

2.4 Relaxarea neradiativă	216
2.5 Rata relaxării totale a tranzițiilor	218
3. Cinetica populării nivelurilor energetice ale sistemelor atomice	220
4. Inversia de populație	223
4.1 Schema cu două niveluri energetice	223
4.2 Schema cu trei niveluri energetice	225
4.3 Schema cu patru niveluri energetice	230
5. Interacțiunea dintre câmpul radiațiilor optice și mediul activ	234
5.1 Ecuațiile cinetice pentru un sistem atomic cu două niveluri energetice supus acțiunii unui câmp <i>em</i> extern armonic	237
5.2 Fenomenul de saturare a tranziției (a diferenței de populație)	239
6. Susceptibilitatea electrică a ansamblului de sisteme atomice	245
7. Tranziții spectrale lățite omogen și neomogen	246
7.1 Tranziții spectrale lățite omogen	246
7.2 Tranziții spectrale lățite neomogen	248
8. Mecanisme de lățire a tranzițiilor spectrale care acționează într-o matrice cristalină	253
8.1 Lățire dipolară	253
8.2 Lățire determinată de neomogeneitățile aleatoare ale rețelei cristaline	254
8.3 Lățire fononică	254
9. "Excitarea coerentă" a ansamblului de sisteme atomice	256

## VII. SUSECEPTIBILITATEA CORESPUNZĂTOARE TRANZIȚIEI CUANTICE A UNUI ANSAMBLU DE SISTEME ATOMICE

1. Proprietățile de polarizare ale tranzițiilor atomice	259
2. Proprietățile de polarizare ale tranzițiilor cuantice tip Zeeman	263
3. Expresia caracteristicilor tensoriale ale susceptibilității	265
4. Analiza energetică a interacțiunii dintre ansamblul de sisteme atomice și perturbarea <i>em</i>	270
5. Niveluri de energie degenerate	271

## VIII. INTERACȚIUNEA ANSAMBLULUI DE SISTEME ATOMICE CU FASCICULE INTENSE DE RADIAȚIE OPTICĂ

1. Cazul semnalului <i>em</i> de amplitudine mică	276
2. Interacțiunea ansamblului de sisteme atomice cu semnale <i>em</i> intense	283
2.1 Soluția în cazul semnalelor intense; frecvența Rabi	284
3. Efectele "pulsurilor coerente"	296

## IX. REZONATORI OPTICI

298

1. Optica matricială	299
2. Fascicule paraxiale de radiație optică	300
2.1 Ecuația de undă paraxială	300
2.2 Integrala lui Huygens	305
2.3 Unde gaussiano-sferice	307
3. Rezonatori optici stabili	319
3.1 Rezonatori simetrici	322
3.2 Rezonatori <i>semisimetrici</i>	325
3.3 Rezonator convex-concav	327
3.4 Rezonator confocal nestabil	328
4. Modurile de ordin superior ale unui rezonator optic	329
4.1 Frecvența modurilor de oscilație ale fasciculelor gaussiene	335
5. Proprietățile fizice ale fascicului gaussian	339
5.1 Diafragmarea unui fascicul gaussian	339
5.2 Propagarea fascicului gaussiano-sferic prin sisteme optice	341

## BIBLIOGRAFIE

347



## Cap. I

# TEORIA CLASICĂ A CÂMPULUI ELECTROMAGNETIC AL RADIAȚIILOR OPTICE

## 1. Ecuațiile lui Maxwell.

La baza explicării din punct de vedere clasic a radiației electromagnetice (*em*) se află teoria câmpului *em* fundamentată de către J.C. Maxwell și publicată în anul 1864. Ecuațiile lui Maxwell reprezintă baza descrierii tuturor fenomenelor *em* clasice. Câmpul *em* este descris de comportarea în timp și spațiu a celor două mărimi vectoriale ce-l definesc: **e** - intensitatea câmpului electric și **b** - inducția câmpului magnetic. Ecuațiile realizează legătura dintre mărimile vectoriale ce caracterizează câmpul *em* într-un punct dat al spațiului, la un moment dat, și caracteristicile ansamblului de sarcini electrice în mișcare, care determină existența acestui câmp. Ele au forma următoare:

$$(1.1) \quad \begin{array}{ll} \text{a)} & \nabla \times \mathbf{e} = -\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} \\ \text{b)} & \nabla \cdot \mathbf{e} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \text{c)} & \nabla \times \mathbf{b} = \mu_0 \mathbf{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial t} \\ \text{d)} & \nabla \cdot \mathbf{b} = 0 \end{array}$$

Ecuațiile Maxwell exprimă faptul că existența câmpului electric poate fi determinată de prezența unor sarcini electrice statice sau de variația în timp a unui câmp magnetic, în timp ce existența unui câmp magnetic este determinată de prezența unor curenți electrice permanenți sau de variația în timp a unui câmp electric. De asemenea scot în evidență faptul că sarcina electrică și curentul electric satisfac ecuația de continuitate (fluxul densității de curent electric (**j**) printr-o suprafață închisă este egal cu variația în timp a densității de sarcină electrică ( $\rho$ ) închisă de către suprafață).

Aplicând operatorul ( $\nabla \cdot$ ) ecuației (1.1c), se obține:



$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{b}) = \mu_0 \nabla \cdot \mathbf{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial t} = 0,$$

sau folosind (1.1b) și inversând derivatele față de coordonate și timp, relația devine:

$$(1.2) \quad \nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0.$$

Dacă la setul de ecuații Maxwell se adaugă relația:

$$(1.3) \quad \mathbf{F} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho \mathbf{e} + \mathbf{j} \times \mathbf{b}, \text{ unde: } \mathbf{j} = \rho \mathbf{v},$$

care descrie mișcarea în câmp *em* a ansamblului a cărui unitate de masă este *m* și densitate de sarcină electrică ( $\rho$ ), atunci setul de relații obținut descrie complet dinamica clasică a interacțiunii dintre particulele încărcate electric și câmpul *em*. În relația (1.3) câmpul electric reprezintă atât câmpul extern ce acționează asupra sarcinii, cât și cel creat de sarcina electrică. Deoarece acțiunea câmpului propriu asupra sarcinii este mică, în primă aproximație, se poate considera numai câmpul extern.

Ecuațiile Maxwell reprezintă un set de ecuații diferențiale, cu derivate parțiale de ordinul întâi, liniare, cuplate, care leagă componentele câmpului electric și ale inducției magnetice. Pentru a ușura rezolvarea, acestea pot fi reduse la două relații mai simple: una care conține numai o mărime vectorială, iar cealaltă numai o mărime scalară. În acest scop se introduc două mărimi noi: *potențialul-vector* și *potențialul-scalar* prin care mărimile inițiale (câmpul electric și inducția magnetică) se exprimă funcție de derivatele temporale și spațiale ale noilor mărimi.

Din relația (1.1d), pe baza relației vectoriale:  $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{a}) = 0$ , rezultă că vectorul inducție magnetică poate fi exprimat, folosind potențialul-vector  $\mathbf{a}(\mathbf{r}, t)$ , prin relația:

$$(1.4a) \quad \mathbf{b}(\mathbf{r}, t) = \nabla \times \mathbf{a}(\mathbf{r}, t),$$

unde  $\mathbf{a}(\mathbf{r}, t)$  reprezintă o mărime vectorială dependentă atât de coordonate cât și de timp.

Relația (1.1a), utilizând (1.4a), devine:

$$\nabla \times \mathbf{e} = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{a}) = -\left( \nabla \times \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} \right), \text{ sau: } \nabla \times \left( \mathbf{e} + \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} \right) = 0.$$

Folosind relația vectorială:  $\nabla \times \nabla \Phi = 0$  (unde  $\Phi$  este o funcție scalară), acest rezultat poate fi scris sub forma:

$$(1.4b) \quad \mathbf{e} + \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} = -\nabla \Phi \text{ sau } \mathbf{e} = -\nabla \Phi - \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t},$$

unde  $\Phi(\mathbf{r}, t)$  reprezintă potențialul-scalar, o mărime scalară dependentă atât de coordonate cât și de timp. Deci pentru a descrie câmpul *em* prin intermediul vectorilor  $\mathbf{e}$  și  $\mathbf{b}$  sunt necesare, în loc de șase mărimi, numai patru: potențialul-scalar și potențialul-vector, care reprezintă trei mărimi scalare.

Folosind noile mărimi, celelalte două ecuații Maxwell se transformă după cum urmează. Relația (1.1c) devine:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{a}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{a}) - \nabla^2 \mathbf{a} = \mu_0 \mathbf{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \left( -\nabla \Phi - \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} \right), \text{ sau:}$$

$$(1.5a) \quad \nabla^2 \mathbf{a} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{a}}{\partial t^2} - \nabla \left( \nabla \cdot \mathbf{a} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) = -\mu_0 \mathbf{j},$$

iar relația (1.1b):

$$\nabla \cdot \left( -\nabla \Phi - \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} \right) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \text{ sau: } \nabla^2 \Phi + \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{a}) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

(se adaugă în ambii membri termenul:  $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}$ )

$$(1.5b) \quad \nabla^2 \Phi - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} - \frac{\partial}{\partial t} \left( \nabla \cdot \mathbf{a} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right).$$

În acest mod setul de patru ecuații Maxwell s-a redus la două ecuații diferențiale de ordinul întâi, care sunt cuplate. Pentru a înlătura cuplajul se folosește arbitrarul introdus în definiția potențialelor. Din relația (1.4a) reiese că vectorul inducție  $\mathbf{b}$  nu se modifică dacă potențialul-vector se consideră de forma:

$$(1.6a) \quad \mathbf{a}' = \mathbf{a} + \nabla \Psi,$$

unde  $\Psi$  este o funcție scalară arbitrară, deoarece:  $\nabla \times \nabla \Psi = 0$ . Pentru a nu se modifica nici expresia intensității câmpului electric, potențialul-scalar (1.4b) capătă forma:

$$\mathbf{e} = -\nabla \Phi + \nabla \frac{\partial \Psi}{\partial t} - \frac{\partial \mathbf{a}'}{\partial t} = -\nabla \Phi' - \frac{\partial \mathbf{a}'}{\partial t}, \text{ unde:}$$

$$(1.6b) \quad \Phi' = \Phi - \frac{\partial \Psi}{\partial t}.$$

Noile potențiale  $\mathbf{a}'(\mathbf{r}, t)$  și  $\Phi'(\mathbf{r}, t)$  sunt echivalente cu cele anterioare, deoarece descriu aceleași câmpuri reale. Pe această bază potențialele  $\mathbf{a}(\mathbf{r}, t)$  și  $\Phi(\mathbf{r}, t)$  se aleg astfel încât să satisfacă relația:

$$(1.7) \quad \nabla \cdot \mathbf{a} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0.$$

În aceste condiții relațiile (1.5a,b) devin:

$$(1.8a) \quad \nabla^2 \mathbf{a} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{a}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{j};$$

$$(1.8b) \quad \nabla^2 \Phi - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}.$$

Pentru mărimile  $\mathbf{a}$  și  $\Phi$  s-au obținut două ecuații diferențiale neomogene, necuplate între ele (asemănătoare cu ecuația undei). Potențialele  $\mathbf{a}$  și  $\Phi$  sunt legate prin condiția (1.7), care reprezintă *condiția de calibrare (etalon)* a lui Lorentz. Transformările (1.6a,b) poartă denumirea de *transformările de calibrare*, iar invarianța mărimilor  $\mathbf{e}$  și  $\mathbf{b}$  față de aceste transformări poartă denumirea de *invarianță de calibrare*. Calibrarea Lorentz este invariantă față de transformările Lorentz din mecanica relativistă, adică este independentă de sistemul de coordonate ales. Dacă câmpurile electrice și magnetice sunt constante în timp, ecuațiile (1.1a,b) capătă o formă mai simplă:

$$(1.9) \quad a) \nabla \times \mathbf{e} = 0 \quad b) \nabla \cdot \mathbf{e} = \frac{\rho}{\epsilon_0}.$$

Relația (1.9a), prin intermediul potențialului-scalar, conform relației (1.4b), permite exprimarea intensității câmpului electric sub forma:

$$\mathbf{e} = -\nabla \Phi,$$

iar relația (1.9b) devine:

$$(1.10) \quad \nabla^2 \Phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0},$$

adică potențialul-scalar satisface ecuația Poisson. Dacă câmpul electric este considerat în vid ( $\rho = 0$ ), potențialul-scalar satisface ecuația Laplace:

$$(1.11) \quad \nabla^2 \Phi = 0.$$

Dacă ansamblul considerat este format din sarcini electrice discrete ( $q_i$ ), atunci potențialul-scalar creat de acestea, într-un punct dat, are forma:

$$(1.12) \quad \Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{r_i},$$

unde  $r_i$  reprezintă distanța de la sarcina  $q_i$  la punctul unde se evaluează potențialul-scalar. Dacă se consideră o distribuție continuă de sarcină, potențialul-scalar este exprimat prin relația:

$$(1.13) \quad \Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r})}{r} dV,$$

unde  $r$  este distanța de la elementul de volum  $dV$  la punctul de observare.

Pentru a analiza cazul câmpului magnetic constant, este necesar să se considere un ansamblu de sarcini electrice care efectuează o mișcare finită, adică particulele rămân tot timpul într-un domeniu finit al spațiului. Câmpul magnetic mediat în timp,

creat de acest ansamblu, va fi constant (nu va depinde de timp), fiind funcție numai de coordonate. Ecuațiile Maxwell (1.1c,d), mediate în timp, au forma:

$$(1.14) \quad a) \nabla \times \bar{\mathbf{b}} = \mu_0 \bar{\mathbf{j}} \quad b) \nabla \cdot \bar{\mathbf{b}} = 0,$$

unde media în timp a derivatei  $\frac{\partial \mathbf{e}}{\partial t}$  este egală cu zero, deoarece mărimea  $\mathbf{e}$  variază într-un interval finit. Folosind (1.4a), relația (1.14a) devine:

$$\nabla \times (\nabla \times \bar{\mathbf{a}}) = \nabla \nabla \cdot \bar{\mathbf{a}} - \nabla^2 \bar{\mathbf{a}} = \mu_0 \bar{\mathbf{j}}.$$

Deoarece potențialul-vector nu este determinat univoc se poate impune condiția suplimentară de forma  $\nabla \cdot \bar{\mathbf{a}} = 0$ ; relația care determină potențialul-vector al câmpului magnetic constant capătă forma ecuației Poisson:

$$\nabla^2 \bar{\mathbf{a}} = -\mu_0 \bar{\mathbf{j}}.$$

Soluția acestei ecuații, analoagă cu (1.10), este:

$$(1.15) \quad \bar{\mathbf{a}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\bar{\mathbf{j}}(\mathbf{r})}{r} dV,$$

unde  $r$  - distanța de la elementul de volum  $dV$  până la punctul de observare a câmpului. Dacă ansamblul de sarcini prezintă o distribuție discretă, se poate scrie relația:

$$(1.16) \quad \bar{\mathbf{a}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_i \frac{q_i \mathbf{v}_i}{r_i},$$

unde  $r_i$  - distanța de la sarcina  $q_i$  la punctul de observare.

În cazul câmpului magnetic sau electric constant în timp, condiția (1.7) se transformă în  $\nabla \cdot \mathbf{a} = 0$ , cunoscută sub denumirea de *calibrarea Coulomb (calibrarea radiației sau calibrarea transversală)*. Această calibrare se utilizează atunci când se consideră un sistem de referință față de care ansamblul care interacționează cu radiația se află în repaus.

În cazul câmpului *em* în vid ( $\rho = 0$ ), ecuațiile (1.8a,b) se transformă în ecuații de undă omogene:

$$(1.17a) \quad \nabla^2 \mathbf{a} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{a}}{\partial t^2} = 0$$

$$(1.17b) \quad \nabla^2 \Phi - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0.$$

În acest caz potențialelor li se pot impune condițiile:

$$\nabla \cdot \mathbf{a} = 0 \quad \text{și} \quad \Phi = 0.$$



Asemenea potențiale satisfac și condiția (1.7), deci în cazul câmpului *em* în spațiul fără sarcini, calibrarea Coulomb coincide cu cea a lui Lorentz. Câmpurile electrice și magnetice vor fi date de relațiile:

$$(1.18) \quad \mathbf{e} = -\frac{\partial^2 \mathbf{a}}{\partial t^2} \quad \text{și} \quad \mathbf{b} = \nabla \times \mathbf{a}.$$

Ecuatiile (1.17) sunt de tipul ecuațiilor de undă, potențialul-vector care satisface ecuația fiind de forma:

$$(1.19) \quad \mathbf{a} = \text{Re} \{ \tilde{\mathbf{A}} \exp[i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})] \}.$$

Soluția ecuației neliniare omogene reprezintă suma soluțiilor ecuației, fără partea dreaptă, și integrala particulară a ecuației cu partea dreaptă diferită de zero. Soluția ecuației pentru potențiale cu surse diferite de zero este de forma:

$$(1.20a) \quad \mathbf{a} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{j}(t')}{r} dV + \mathbf{a}_0,$$

$$(1.20b) \quad \Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(t')}{r} dV + \Phi_0,$$

unde  $\mathbf{a}_0$  și  $\Phi_0$  reprezintă soluția ecuației fără partea dreaptă. În această ecuație, mărimea  $t' = t - \frac{r}{c}$  semnifică faptul că se consideră valoarea densității de sarcină și de curent electric din elementul de volum  $dV$  la momentul  $t'$ , anterior momentului  $t$ , când se determină valoarea câmpului; mărimea  $\frac{r}{c}$  reprezintă intervalul de timp necesar propagării câmpului *em* de la sursă până la punctul de observare.

## 2. Radiația *em* emisă de către un ansamblu de sarcini electrice.

Considerăm un ansamblu de sarcini electrice ( $q_i$ ), aflate într-o mișcare complexă și continuă, localizat într-un volum determinat. Ansamblul este caracterizat prin densitatea de sarcină electrică  $\rho(\mathbf{r}, t)$  definită în punctul poziționat prin vectorul  $\mathbf{r}$ , la momentul  $t'$  (fig. 1). Dacă densitatea de sarcină electrică prezintă variații în timp, ansamblul de sarcini trebuie caracterizat și prin densitatea de curent electric  $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t')$ . Sarcinile electrice prezentând o mișcare cu viteză variabilă, conform electrodinamicii clasice, emit radiații *em*.

Să analizăm câmpul *em* creat de ansamblu într-un punct  $M(\mathbf{R}_0)$ , situat în vid la o distanță mare față de dimensiunile acestuia și față de lungimea de undă a radiației *em* emise. În sistemul de coordonate considerat, punctul  $M$  este poziționat prin

vectorul  $\mathbf{R}_0$ , a cărui direcție este dată de versorul  $\mathbf{n}$ . Poziția elementului de volum  $dV$  este dată de vectorul  $\mathbf{r}$ , iar cea a punctului  $M$  față de acest element este  $\mathbf{R} = \mathbf{R}_0 - \mathbf{r}$ . În primă aproximație, în condiția  $R_0 \gg r$ , se poate considera:

$$\mathbf{R} = |\mathbf{R} - \mathbf{r}| \cong R_0 - \mathbf{r} \cdot \mathbf{n}.$$

Pentru a calcula intensitatea câmpului electric și inducția câmpului magnetic a câmpului *em* în punctul  $M(\mathbf{R}_0)$  la momentul  $t$ , este necesar să se cunoască expresiile corespunzătoare ale potențialului-scalar și potențialului-vector. Aceste expresii sunt date de relațiile (1.13, 1.15 sau 1.12, 1.16) și sunt determinate de structura ansamblului de sarcini la momentul  $t' = t - \frac{r}{c}$ . La numitorul acestor relații se poate neglija mărimea  $(\mathbf{r} \cdot \mathbf{n})$  față de mărimea  $R_0$ , dar în argumentul densității de sarcină nu se poate efectua o asemenea aproximație. În expresia argumentului prezintă importanță valoarea cu care se modifică mărimea densității în intervalul de timp  $\frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{c}$ , și nu mărimea valorii  $\frac{R_0}{c}$  față de mărimea  $\frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{c}$ .

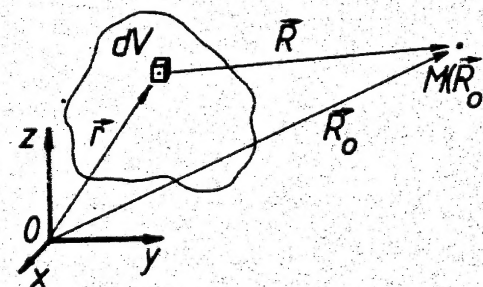


Fig. 1

În aceste condiții expresia potențialului-vector este:

$$\mathbf{a}(\mathbf{R}_0, t') = \frac{\mu_0}{4\pi R_0} \int_V \mathbf{j} \left( t - \frac{R_0}{c} + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{c} \right) dV,$$

care, dacă se dezvoltă în serie cu limitare la prima aproximație, devine:



$$(2.1) \quad \mathbf{a}(\mathbf{R}_0, t') = \frac{\mu_0}{4\pi R_0} \int_V \left( t - \frac{R_0}{c} \right) dV + \frac{\mu_0}{4\pi c R_0} \frac{\partial}{\partial t'} \int_V \left( t - \frac{R_0}{c} \right) (\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}) dV.$$

Dacă ansamblul este constituit din sarcini electrice discrete, expresia (2.1) capătă forma:

$$(2.2) \quad \mathbf{a}(\mathbf{R}_0, t') = \frac{\mu_0}{4\pi R_0} \sum_i q_i \mathbf{v}_i + \frac{\mu_0}{4\pi c R_0} \frac{\partial}{\partial t'} \left[ \sum_i q_i \mathbf{v}_i (\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{n}) \right],$$

unde  $\mathbf{v}_i$  reprezintă viteza de deplasare a sarcinilor electrice la momentul  $t'$ . Conform relației (1.4a), mărimea vectorilor inducție magnetică și intensitate a câmpului electric nu se modifică dacă potențialului-vector  $\mathbf{a}$  i se adaugă un vector proporțional cu  $\mathbf{n}$ . Se alege acest vector sub forma:

$$-\frac{\mu_0}{24\pi c R_0} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} \left[ \sum_i q_i r_i^2 \right] \mathbf{n}.$$

Considerând identitatea vectorială:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}) &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} [\mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{n})] + \frac{1}{2} \mathbf{v}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}) - \frac{1}{2} \mathbf{r}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) = \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} [\mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{n})] + \frac{1}{2} [\mathbf{r}(\mathbf{r} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{n}] \end{aligned}$$

expresia (2.2) devine:

$$(2.3) \quad \begin{aligned} \mathbf{a}(\mathbf{R}_0, t') &= \frac{\mu_0}{4\pi R_0} \sum_i q_i \mathbf{v}_i + \frac{\mu_0}{4\pi c R_0} \frac{\partial}{\partial t'} \left[ \sum_i q_i \mathbf{v}_i (\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{n}) \right] - \\ &\quad - \frac{\mu_0}{24\pi c R_0} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} \left[ \sum_i q_i r_i^2 \right] \mathbf{n} = \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi R_0} \sum_i q_i \mathbf{v}_i + \frac{\mu_0}{24\pi c R_0} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} \left\{ \sum_i q_i [3\mathbf{r}_i (\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{n}) - \mathbf{n} r_i^2] \right\} + \\ &\quad + \frac{\mu_0}{8\pi c R_0} \frac{\partial}{\partial t'} \left\{ \sum_i q_i [(\mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i) \times \mathbf{n}] \right\} = \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi R_0} \frac{\partial \mathbf{P}(t')}{\partial t'} + \frac{\mu_0}{24\pi c R_0} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} \mathbf{Q}_n(t') + \frac{\mu_0}{8\pi c R_0} \frac{\partial}{\partial t'} [\mathbf{M}(t') \times \mathbf{n}]. \end{aligned}$$

unde:  $\mathbf{P}(t') = \sum_i q_i \mathbf{r}_i(t')$  reprezintă momentul de dipol al ansamblului de sarcini

electrice,  $\mathbf{M}(t') = \sum_i q_i [\mathbf{r}_i(t') \times \mathbf{v}_i(t')]$  - momentul de dipol magnetic al

ansamblului, iar  $\mathbf{Q}_n(t') = \sum_i q_i \{ 3\mathbf{r}_i(t') [\mathbf{r}_i(t') \cdot \mathbf{n}] - r_i^2(t') \}$  - produsul dintre versorul  $\mathbf{n}$  și tensorul momentului de cuadropol electric, ale cărui componente sunt:

$$Q_{\alpha\beta} = \sum_i q_i \{ x_i^\alpha x_i^\beta - \delta_{\alpha\beta} r_i^2 \}.$$

Dacă în dezvoltarea în serie a potențialului-vector după mărimea  $\frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{c}$  se

consideră și corecția de ordinul doi, aceștia îi corespunde radiația de octupol electric și cuadropol magnetic, ș.a.m.d. În domeniul optic, valoarea intensității emisiei multipolilor este foarte mică și prezintă interes numai dacă emisia de dipol electric este interzisă de regulile cuantice de selecție.

Conform relației (2.3), celor trei termeni componenți ai potențialului-vector le corespund trei tipuri de radiație *em*: emisia de radiație de dipol electric, obținută în aprox. de ordinul zero a mărimii  $\mathbf{a}(\mathbf{R}_0, t)$ , și emisia de radiație de dipol magnetic și de cuadropol electric, obținută în aprox. de ordinul întâi. Pentru a analiza caracteristicile câmpului *em* din punct de vedere al electrodinamicii clasice într-un punct situat departe de sursă, se poate considera un ansamblu emițător format din niște modele electro-mecanice: dipoli electrice, respectiv dipoli magnetici și cuadropoli electrice.

Să analizăm sensul fizic al ordinului aproximației potențialului-vector.

Mărimea temporală  $\frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{c}$  se poate neglija, dacă în acest interval de timp distribuția

sarcinilor ansamblului se modifică foarte puțin. Dacă  $T$  reprezintă mărimea intervalului de timp în decursul căruia distribuția sarcinilor s-ar modifica în mod esențial, atunci radiația emisă de sistem ar prezenta un caracter periodic, caracterizat prin perioada  $T$ . Dacă  $d$  reprezintă ordinul de mărime al dimensiunilor sistemului, pentru a nu se

modifica distribuția de sarcină, este necesară condiția:  $\frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{c} \cong \frac{d}{c} \langle \langle T \rangle \rangle$ . De aici se

obține:  $d \langle \langle cT \rangle \rangle \cong \lambda$ , adică dimensiunile volumului ocupat de ansamblu trebuie să fie mici față de lungimea de undă a radiației emise. Condiția  $d \langle \langle cT \rangle \rangle$  conduce la

$v \cong \frac{d}{c} \langle \langle c \rangle \rangle$ , unde  $v$  reprezintă viteza de deplasare a sarcinilor. Dacă dimensiunile

ansamblului sunt mici față de lungimea de undă a radiației emise de către acesta, sau dacă viteza de deplasare a sarcinilor este mică față de viteza radiației optice în vid,

atunci dezvoltarea potențialului-vector se poate limita la aproximația de ordin zero, cunoscută sub denumirea de *aproximația de dipol electric*.

### 3. Unde electromagnetice.

Dacă punctul în care se determină câmpul *em* se află la distanță mare față de sursa de radiație care satisface condițiile *aproximației de dipol electric*, pe un domeniu mic al spațiului care conține punctul, câmpul poate fi reprezentat sub formă de unde plane. Pentru ușurința calculelor în continuare se vor considera unde plane armonice, care sunt descrise de relațiile:

$$\mathbf{e} = \mathbf{E}_0 \exp[i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})] \quad \text{și} \quad \mathbf{b} = \mathbf{B}_0 \exp[i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})],$$

unde:  $k(\omega) = \frac{2\pi}{\lambda_0} n(\omega) = k_0 n(\omega) = \frac{\omega n(\omega)}{c}$  reprezintă vectorul de undă care în

mărimea lui conține informații asupra frecvenței radiației optice și ale proprietăților optice ale mediului prin care se propagă (caracterizat prin indicii de refracție  $n$ ), iar prin sensul lui indică sensul de propagare a frontului de undă.

În cazul spațiului vid, ecuațiile Maxwell au forma:

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \text{a)} \quad \nabla \times \mathbf{e} &= -\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} & \text{b)} \quad \nabla \cdot \mathbf{e} &= 0 \\ \text{c)} \quad \nabla \times \mathbf{b} &= -\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial t} & \text{d)} \quad \nabla \cdot \mathbf{b} &= 0 \end{aligned}$$

Considerând unde plane armonice, ecuațiile (3.1 a,c) conduc la relațiile:

$$(3.2) \quad \text{a)} \quad -i(\mathbf{k} \times \mathbf{e}) = -i\omega \mathbf{b}, \text{ deci: } \mathbf{b} = \frac{1}{\omega} (\mathbf{k} \times \mathbf{e}) = \frac{1}{\omega} (\mathbf{n} \times \mathbf{e}),$$

$$(3.2) \quad \text{c)} \quad -i(\mathbf{k} \times \mathbf{b}) = i\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial t}, \text{ deci: } \mathbf{e} = -\frac{1}{\epsilon_0 \mu_0 \omega} (\mathbf{k} \times \mathbf{b}) = c(\mathbf{k} \times \mathbf{b}),$$

iar ecuațiile (3.1 b,d) la relațiile:

$$(3.2) \quad \text{b)} \quad -i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{e}) = 0 \quad \text{d)} \quad -i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{b}) = 0$$

În acest caz să stabilim legătura dintre intensitatea câmpului electric, respectiv inducția câmpului magnetic și potențialul-vector caracteristic ansamblului de sarcini considerat. Deoarece determinarea celor două mărimi se face în spațiu lipsit de sarcini electrice, potențialul-vector se exprimă, conform relației (1.19), printr-o funcție armonică:

$$\mathbf{a}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{A}_0 \exp[i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})],$$

unde  $\mathbf{A}_0$  este o mărime fizică constantă. Folosind identitatea vectorială:

$$\nabla \times (\phi \mathbf{r}) = (\nabla \phi) \times \mathbf{r} + \phi (\nabla \times \mathbf{r})$$

( $\phi$  reprezintă o mărime scalară), relația (1.4a) devine:

$$(3.3) \quad \mathbf{b} = \nabla \times \{ \exp[i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})] \} \mathbf{A}_0 = -i \frac{\omega}{c} (\mathbf{n} \times \mathbf{a}) = \frac{1}{c} (\dot{\mathbf{a}} \times \mathbf{n}),$$

unde:  $\dot{\mathbf{a}} = -i\omega \mathbf{a}$  și  $\nabla \times \mathbf{A}_0 = 0$  (deoarece:  $\mathbf{A}_0 = \text{ct}$ ).

Dacă ansamblul de sarcini electrice generatoare de câmp *em*, satisface condițiile aproximației de dipol electric, potențialul-vector este de forma:

$$(3.4) \quad \mathbf{a}(\mathbf{R}_0, t') = \frac{\mu_0}{4\pi R_0} \sum_i q_i \mathbf{v}_i(t') = \frac{\mu_0}{4\pi R_0} \dot{\mathbf{p}}_i,$$

corespunzător, inducția câmpului magnetic și intensitatea câmpului electric, devin:

$$(3.5a) \quad \mathbf{b} = \frac{1}{c} (\dot{\mathbf{a}} \times \mathbf{n}) = \frac{\mu_0}{4\pi c R_0} [\ddot{\mathbf{p}}(t') \times \mathbf{n}] = \frac{1}{4\pi \epsilon_0 c^3 R_0} [\ddot{\mathbf{p}}(t') \times \mathbf{n}],$$

$$(3.5b) \quad \begin{aligned} \mathbf{e} &= c(\mathbf{b} \times \mathbf{n}) = (\dot{\mathbf{a}} \times \mathbf{n}) \times \mathbf{n} = \frac{\mu_0}{4\pi R_0} [\ddot{\mathbf{p}}(t') \times \mathbf{n}] \times \mathbf{n} = \\ &= \frac{1}{4\pi \epsilon_0 c^2 R_0} \{ \ddot{\mathbf{p}}(t') [\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}] - [\ddot{\mathbf{p}}(t') \cdot \mathbf{n}] \mathbf{n} \} \end{aligned}$$

Deoarece sursa de radiație optică îndeplinește condițiile de sursă punctiformă, este util să se indice poziția punctelor în care se calculează câmpul *em* într-un sistem de coordonate sferice ( $r, \theta, \varphi$ ), iar intensitatea câmpurilor să fie reprezentată într-un sistem de coordonate orientat prin versorii  $\mathbf{n}, \mathbf{n}_\theta, \mathbf{n}_\varphi$  având originea în punctul de observare  $\mathbf{M}(\mathbf{R}_0)$  (fig. 2). În aceste condiții, câmpurile sunt date de relațiile:

$$(3.6) \quad \begin{aligned} \text{a)} \quad \mathbf{e}(\mathbf{R}_0, t) &= -\frac{1}{4\pi \epsilon_0 c^2 R_0} \frac{\sin \theta}{\partial t'^2} \ddot{P}(t') \mathbf{n}_\theta \\ \text{b)} \quad \mathbf{b}(\mathbf{R}_0, t) &= -\frac{1}{4\pi \epsilon_0 c^3 R_0} \frac{\sin \theta}{\partial t'^2} \ddot{P}(t') \mathbf{n}_\varphi \end{aligned}$$

Aceste relații scot în evidență următoarele caracteristici.

Dacă există un ansamblu de sarcini electrice localizat într-un domeniu spațial care îndeplinește condiția de sursă punctiformă, caracterizat printr-un moment de dipol electric  $\mathbf{P}(t')$ , variabil în timp însă cu direcția fixă în spațiu, atunci acest sistem generează un câmp *em*, care se propagă în spațiul lipsit de substanță cu viteza

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}.$$

La distanțe  $R_0$  suficient de mari, vectorii  $\mathbf{e}$  și  $\mathbf{b}$  sunt perpendiculari pe vectorul  $\mathbf{R}_0$ , care exprimă direcția de propagare, deci unda *em* generată de o sursă



Mărimile  $e$  și  $b$ , la un moment dat, au valori constante pe cercurile "paralelă" ale unei sfere ( $\theta = ct$ ), iar pentru  $\varphi = ct$  (cercuri "meridiane"), ele variază de-a lungul cercului, având valoare maximă pentru  $\theta = \frac{\pi}{2}$  și valoare zero pentru  $\theta = 0$ ; o sursă punctiformă nu generează câmp *em* de-a lungul direcției momentului de dipol electric. Undele ce îndeplinesc aceste condiții se numesc *unde sferice neomogene*.

Unde *em*, definită la momentul *t*, conține informații cu privire la procesele de mișcare ale particulelor încărcate ale ansamblului care au avut loc la momentul *t'*, deoarece momentul de dipol electric este definit la momentul  $t' = t - \frac{R}{c}$ , retardat cu intervalul de timp  $\Delta t = R/c$  față de momentul *t*.

Modelul de dipol electric joacă un rol determinant în analiza pe baza electrodinamicii clasice a emisiei radiației *em* de către un ansamblu de sarcini electrice și a interacțiunii acestora cu substanța. Modelul reprezintă un sistem electro-mecanic constituit din două corpuri punctiforme (masele corpurilor pot fi diferite), încărcate cu sarcini electrice egale dar de semne opuse, dispuse la distanța *r* unul față de altul. El este caracterizat prin momentul de dipol electric, o mărime fizică vectorială, orientată de la sarcina electrică negativă spre cea pozitivă și definită conform relației:

unde vectorul  $\mathbf{r}$  este orientat de la "centrul" sarcinilor pozitive spre cel al sarcinilor negative.

Dipolul electric ca sistem fizic, în stare neperturbată, poate prezenta moment de dipol electric permanent sau acesta poate fi egal cu zero. Starea poate fi perturbată sub acțiunea unor forțe exterioare. Perturbarea constă în deformarea sistemului care determină variația ( $\Delta r$ ) a distanței dintre "centrul" sarcinilor pozitive și cel al sarcinilor negative; ca rezultat, în sistemul considerat se induce un moment de dipol electric sau se modifică momentul de dipol permanent. Forțele exterioare efectuează un lucru mecanic împotriva celor interioare; lucrul mecanic al forțelor exterioare este regăsit sub forma variației energiei potențiale  $V(\Delta r)$  a sistemului corespunzătoare forțelor interioare.

Atomul din punct de vedere electric reprezintă un sistem neutru. Dacă este supus acțiunii unui câmp *em*, acesta acționează asupra particulelor individuale încărcate constitutive ale sistemului cu o forță descrisă de relația (1.3). Considerăm  $m_e$  - masa



electronului poziționat prin vectorul  $\mathbf{r}_e$ , iar  $(-e)$  - sarcina acestuia (fig. 3), respectiv  $m_n$  - masa nucleului poziționat prin vectorul  $\mathbf{r}_n$ , iar  $(+e)$  - sarcina acestuia. (Deoarece în fenomenele optice nu sunt implicate particule relativiste, în relația (1.3) poate fi neglijată contribuția câmpului magnetic). Între nucleu și electron se manifestă o forță de interacțiune care depinde de distanța relativă  $\mathbf{x} = \mathbf{r}_e - \mathbf{r}_n$  dintre cele două particule.

Centrul de masă al sistemului considerat este poziționat prin vectorul:

$$\mathbf{R} = \frac{m_e \mathbf{r}_e + m_n \mathbf{r}_n}{m_e + m_n},$$

iar vectorii de poziție ai constituenților sistemului sunt dați de relațiile:

$$\mathbf{r}_e = \mathbf{R} + \frac{m_n}{m_e + m_n} \mathbf{x} \quad \text{și} \quad \mathbf{r}_n = \mathbf{R} - \frac{m_e}{m_e + m_n} \mathbf{x}.$$

Mișcarea electronului, respectiv a nucleului, sub acțiunea câmpului  $em$  este descrisă de ecuația:

$$m_e \frac{d^2 \mathbf{r}_e}{dt^2} = m_e \frac{d^2 \mathbf{R}}{dt^2} + \frac{m_e m_n}{m_e + m_n} \frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} = -e e(\mathbf{r}_e, t) + \mathbf{F}_{en}(\mathbf{x})$$

$$\frac{m_n}{m_e + m_n} \frac{d^2 \mathbf{R}}{dt^2} - \frac{m_e m_n}{m_e + m_n} \frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} = e e(\mathbf{r}_n, t) + \mathbf{F}_{ne}(\mathbf{x}),$$

unde  $\mathbf{F}_{ne}(\mathbf{x}) = -\mathbf{F}_{en}(\mathbf{x})$  reprezintă forța de interacțiune nucleu-electron, iar  $e$  - intensitatea câmpului electric în locul unde este dispusă particula. Dacă cele două relații se adună se obține:

$$a) \quad (m_e + m_n) \frac{d^2 \mathbf{R}}{dt^2} = e [e(\mathbf{r}_n, t) - e(\mathbf{r}_e, t)],$$

iar dacă se scad rezultă:

$$b) \quad \frac{m_e m_n}{m_e + m_n} \frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} = \frac{e}{2} [e(\mathbf{r}_n, t) + e(\mathbf{r}_e, t)] + \mathbf{F}_{en}(\mathbf{x}) + \frac{m_n - m_e}{2} \frac{d^2 \mathbf{R}}{dt^2}.$$

Ecuația a) descrie mișcarea centrului de masă al sistemului atomic sub acțiunea câmpului  $em$ , iar ecuația b) descrie variația în timp a coordonatei relative  $\mathbf{x}$  a sistemului.

Considerând faptul că dimensiunile sistemului atomic sunt cuprinse în domeniul  $(1 \div 10) \text{ \AA}$ , iar lungimea de undă a radiației optice este de ordinul miilor de  $\text{\AA}$  (cazul aproximației de dipol electric), pe domeniul ocupat de sistemul atomic se poate exprima intensitatea câmpului electric printr-o dezvoltare în serie Taylor, față de centrul de masă al sistemului, funcție de parametrul  $\mathbf{x}$ :

$$e(\mathbf{r}_n, t) = e \left( \mathbf{R} - \frac{m_e}{m_e m_n} \mathbf{x}, t \right) = e(\mathbf{R}, t) - \frac{m_e}{m_e m_n} \mathbf{x} \cdot \nabla e(\mathbf{R}, t) + \dots$$

$$e(\mathbf{r}_e, t) = e \left( \mathbf{R} + \frac{m_n}{m_e m_n} \mathbf{x}, t \right) = e(\mathbf{R}, t) + \frac{m_n}{m_e m_n} \mathbf{x} \cdot \nabla e(\mathbf{R}, t) + \dots$$

Aceste expresii, introduse în ecuațiile a) și b), conduc la:

$$(m_e + m_n) \frac{d^2 \mathbf{R}}{dt^2} \cong -e \mathbf{x} \cdot \nabla e(\mathbf{R}, t),$$

$$\frac{m_e m_n}{m_e + m_n} \frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} \cong -e e(\mathbf{R}, t) + \frac{m_n - m_e}{m_e + m_n} e \mathbf{x} \cdot \nabla e(\mathbf{R}, t) + \mathbf{F}_{en}(\mathbf{x}).$$

Conform definiției, momentul de dipol al sistemului este:  $\mathbf{p} = e \mathbf{x}$ , iar mărimea  $V(\mathbf{x}, \mathbf{R}, t) = -\mathbf{p} \cdot \nabla e(\mathbf{R}, t)$  reprezintă energia potențială determinată de interacțiunea dipolului electric dispus în punctul  $\mathbf{R}$  cu câmpul  $em$ . De aici rezultă:

$$e e(\mathbf{R}, t) = -\nabla_{\mathbf{x}} [-e \mathbf{x} e(\mathbf{R}, t)] = -\nabla_{\mathbf{x}} V(\mathbf{x}, \mathbf{R}, t).$$

În aceste condiții, relațiile (a') și (b') devin:

$$(a'') \quad (m_e + m_n) \frac{d^2 \mathbf{R}}{dt^2} \cong -\mathbf{p} \cdot \nabla e(\mathbf{R}, t) = -\nabla_{\mathbf{R}} V(\mathbf{x}, \mathbf{R}, t),$$

(b'')

$$\frac{m_e m_n}{m_e + m_n} \frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} \cong -\nabla_{\mathbf{x}} V(\mathbf{x}, \mathbf{R}, t) + \frac{m_n - m_e}{m_e + m_n} \nabla_{\mathbf{R}} V(\mathbf{x}, \mathbf{R}, t) + \mathbf{F}_{en}(\mathbf{x}).$$

În multe cazuri de interes practic se poate presupune că centrul de masă al sistemului nu este afectat de către câmpul electric, ci numai coordonata relativă  $\mathbf{x}$ . Din punct de vedere cuantic, unei variații a coordonatei relative îi corespund tranziții ale sistemului atomic între nivelurile de energie, tranziții ce pot fi implicate în efectul de emisie stimulată. Mișcarea sistemului va fi descrisă de ecuația (b'') de forma:

$$m_e \frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} = e e(\mathbf{R}, t) + \mathbf{F}_{en}(\mathbf{x}).$$

Există fenomene în care influența câmpului asupra centrului de masă este esențială: micșorarea temperaturii ansamblului de sisteme atomice determinată de interacțiunea acestora cu câmpuri intense sau așa numitul efect de "capcană laser" (laser trapping).

Pentru a rezolva ecuațiile (a'') și (b'') este necesar să se cunoască expresia forței de interacțiune electron-nucleu. La sfârșitul secolului al 19-lea, H.A. Lorentz a propus modelul dipolului electric liniar oscilant amortizat sau modelul Lorentz. Deoarece când a elaborat modelul nu se cunoștea structura atomului, Lorentz a presupus că dacă nu acționează forțe exterioare, electronul ocupă în atom o poziție de echilibru, iar sub

acțiunea componentei electrice a câmpului  $em$  el efectuează o deplasare  $x$  din poziția de echilibru. Modelul este valabil și pentru structura actuală a atomului. Pentru un atom cu  $Z$  electroni se urmărește acțiunea câmpului  $em$  numai asupra unui singur electron (electronul optic). Sarcina electrică a celor  $(Z-1)$  electroni este compensată de sarcina celor  $(Z-1)$  protoni ai nucleului. Se obține un sistem aflat în echilibru format din nucleu cu masă mare și sarcină  $(+e)$  și un electron cu sarcina  $(-e)$ , a cărui masă este foarte mică față de nucleu, dispus la distanța  $x$  față de acesta. Ca rezultat a deplasării electronului sub acțiunea câmpului electric, în modelul considerat se vor manifesta forțe de tip elastic care caută să-l readucă în poziția de echilibru. Ecuația ce descrie variația în timp a deplasării  $x$  va fi de forma ecuației (b'') și anume:

$$m_e \frac{d^2 x}{dt^2} \cong e e(R, t) - k x$$

unde  $k$  reprezintă constanta elastică asociată forței de legătură.

Pentru a reprezenta sistemul într-un mod cât mai apropiat de realitate, funcția ce descrie energia potențială efectivă a sistemului poate fi scrisă ca o serie de puteri în  $(\Delta r)$ :

$$(4.1) \quad V(\Delta r) = \frac{1}{2} m \omega_0^2 (\Delta r)^2 + A(\Delta r)^3 + B(\Delta r)^4 + \dots$$

Pentru a identifica coeficienții, se dezvoltă în serie Taylor funcția  $V(\Delta r)$ , dacă aceasta este continuă și derivabilă:

$$(4.2) \quad V(\Delta r) = V(\Delta r)|_0 + \frac{\Delta r}{1!} \frac{dV(\Delta r)}{d(\Delta r)} \Big|_0 + \frac{(\Delta r)^2}{2!} \frac{d^2 V(\Delta r)}{d(\Delta r)^2} \Big|_0 + \frac{(\Delta r)^3}{3!} \frac{d^3 V(\Delta r)}{d(\Delta r)^3} \Big|_0 + \dots$$

în jurul poziției de echilibru ( $\Delta r = 0$ ). În relația (4.2),  $V(0)$  reprezintă o constantă aditivă la energia totală, deoarece nu generează nici o forță ( $F = -dV(\Delta r)/d(\Delta r)$ ), aceasta poate fi neglijată. De asemenea este necesar să se considere:  $dV(\Delta r)/d(\Delta r) = 0$ , deoarece în punctul de echilibru stabil nu acționează nici o forță. Față de punctul de echilibru stabil energia potențială este pozitivă (fig. 4), deci trebuie îndeplinită și condiția:  $d^2 V(\Delta r)/d(\Delta r)^2 > 0$ .

Dezvoltarea în serie Taylor care satisface condițiile sistemului fizic considerat, este de forma:

$$(4.3) \quad V(\Delta r) = \left| \frac{(\Delta r)^2}{2} \frac{d^2 V(\Delta r)}{d(\Delta r)^2} \right|_0 + \left| \frac{(\Delta r)^3}{6} \frac{d^3 V(\Delta r)}{d(\Delta r)^3} \right|_0 + \dots$$

Din identificarea relației (4.1) cu (4.3), rezultă că:  $m \omega_0^2 = \left| \frac{d^2 V(\Delta r)}{d(\Delta r)^2} \right|_0$

(frecvența proprie de oscilație ( $\omega_0$ ) a sistemului este determinată de curbura funcției de

potențial efectiv), respectiv:  $A = \left| \frac{1}{6} \frac{d^3 V(\Delta r)}{d(\Delta r)^3} \right|_0$

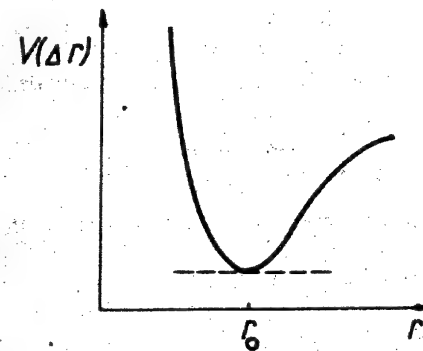


Fig. 4.

Forța care apare în sistem ca rezultat al deformării este de forma:

$$(4.4) \quad F = -\frac{dV(\Delta r)}{d(\Delta r)} = -m \omega_0^2 (\Delta r) - 3A(\Delta r)^2 - 4B(\Delta r)^3 - \dots$$

Termenii neliniari din relația (4.4), conduc la ecuații diferențiale neliniare care descriu mișcarea sistemului fizic. Aceste ecuații, în general sunt dificil de rezolvat și trebuie tratate numeric. Termenii neliniari din (4.4) sunt responsabili de efectele optice neliniare.

Dacă:  $A = B = \dots = 0$ , se obține:

$$F = -m \omega_0^2 (\Delta r) = -k(\Delta r),$$

adică forța care apare în sistem este proporțională cu mărimea deformării și acționează în sens invers sensului de creștere a acesteia, deci este o forță de tip elastic. Acesta este cazul efectelor optice liniare.

Deformarea sistemului fizic considerat se poate produce prin două procese: perturbare momentană determinată de cauze externe sau prin interacțiuni cu un câmp *em* extern.

#### 4.1 Perturbare momentană.

În timpul perturbării sistemului fizic (dipolul electric), într-un interval de timp foarte scurt, se produce o deformare a acestuia care determină apariția unui moment de dipol electric:  $p_0 = q \Delta r_0$ , unde:  $\Delta r_0$  reprezintă deformarea inițială a sistemului. După perturbare, în sistem se manifestă forțe elastice care au tendința de a-l readuce la starea de echilibru și forțe care se opun acestei tendințe (de ex. forțe de frecare), care, pentru viteze mici ale deplasării, sunt proporționale cu viteza (în continuare va fi considerată numai deplasarea de-a lungul axei  $x$ ):

$$(4.5) \quad F_{fr} = -\eta \frac{dx}{dt}$$

Ecuția ce descrie variația în timp a deformației  $x$  este de forma:

$$(4.6) \quad m \frac{d^2 x}{dt^2} = -\eta \frac{dx}{dt} - kx$$

Înmulțind cu  $q/m$  (unde  $m$  reprezintă masa sarcinii electrice în mișcare) și notând  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ , respectiv:  $\gamma_0 = \eta/m$ , se obține ecuația:

$$(4.7) \quad \frac{d^2 p(t')}{dt'^2} + \gamma_0 \frac{dp(t')}{dt'} + \omega_0^2 p(t') = 0,$$

care descrie variația în timp a momentului de dipol electric indus în sistem ca rezultat al perturbării momentane.

Deoarece în timpul mișcării apar forțe disipative, variația momentului de dipol electric va fi periodică, amortizată, deci momentul de dipol poate fi exprimat printr-o integrală Fourier:

$$(4.8a) \quad p(t') = \int_{-\infty}^{+\infty} p(\nu) e^{i2\pi\nu t'} d\nu = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} p(\omega) e^{i\omega t'} d\omega, \text{ unde:}$$

$$(4.8b) \quad p(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(t') e^{-i2\pi\nu t'} dt' = \int_{-\infty}^{+\infty} p(t') e^{i\omega t'} dt',$$

reprezintă amplitudinea componentelor armonice ale mișcării amortizate a dipolului. În aceste condiții, ecuația de mișcare (4.7) se scrie:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [-\omega^2 + i\omega\gamma_0 + \omega_0^2] p(\omega) e^{i\omega t'} d\omega = 0$$

Această ecuație trebuie să fie satisfăcută pentru orice valoare  $\omega$ , respectiv  $p(\omega)$ , deci este necesară egalitatea:

$$\omega^2 - i\omega\gamma_0 - \omega_0^2 = 0.$$

De unde:  $\omega = i \frac{\gamma_0}{2} \pm \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{\gamma_0}{2}\right)^2} = i \frac{\gamma_0}{2} \pm \omega_1$ , unde  $\omega_1$  reprezintă pulsația oscilației dipolului amortizat, diferită de pulsația proprie de oscilație a dipolului neamortizat. Pentru cazul oscilațiilor din domeniul optic ( $\gamma_0 \ll \omega_0$ ) diferența este foarte mică și se poate considera:

$$\omega_1 \cong \omega_0 \left(1 - \frac{\gamma_0^2}{8\omega_0^2}\right)$$

Expresia momentului de dipol electric devine:

$$(4.9a) \quad p(t') = e^{-\frac{\gamma_0}{2}t'} e^{i\omega_0 t'} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} p(\omega) d\omega = p_0 e^{-\frac{\gamma_0}{2}t'} e^{i\omega_0 t'},$$

iar amplitudinile spectrale ale acestuia sunt date de funcția complexă:

$$(4.9b) \quad p(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_0 e^{-\frac{\gamma_0}{2}t'} e^{i(\omega - \omega_0)t'} dt' = \frac{p_0}{\frac{\gamma_0}{2} - i(\omega - \omega_0)}$$

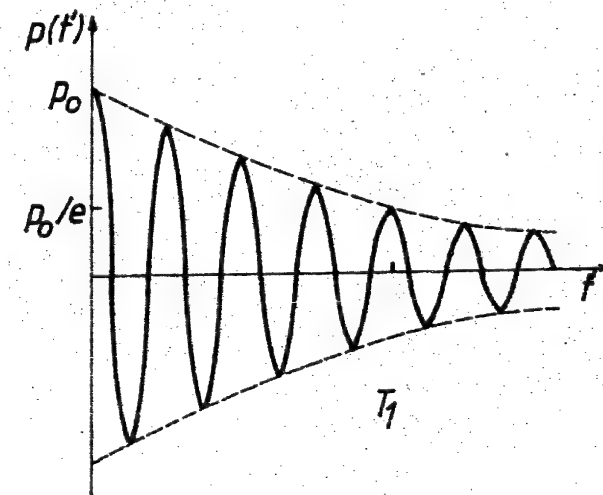


Fig. 5



Partea reală a funcției complexe (4.9 a) este prezentată în fig. 5. Expresia (4.9 a) arată că momentul de dipol electric al sistemului considerat variază în timp în mod oscilator amortizat cu frecvența  $\omega_0$ , factorul de amortizare fiind reprezentat de mărimea  $\gamma_0$ . Durata oscilației este caracterizată prin intervalul de timp  $T_1$ , măsurat din momentul perturbării, când sistemul își mărește energia internă, până în momentul când amplitudinea oscilației scade de  $e$  ori față de cea inițială:

$$\frac{p_0 e^{-\frac{\gamma_0}{2} T_1}}{p_0} = \frac{1}{e}, \text{ deci: } T_1 = \frac{2}{\gamma_0}$$

Acestă mărime este cunoscută sub denumirea de *time de relaxare (stingere)* al oscilațiilor sistemului considerat.

De asemenea relația (4.9a) evidențiază faptul că momentul de dipol indus în sistem poate fi considerat ca fiind rezultatul prezenței simultane a unui număr infinit de dipoli armonici a căror frecvență de oscilație este distribuită în mod continuu în domeniul  $(-\infty, +\infty)$ , amplitudinea fiecărui dipol armonic fiind dată de relația (4.9b), iar între fazele oscilațiilor dipolilor armonici nu există o legătură de fază (faza inițială poate lua cu probabilitate egală orice valoare în domeniul  $(-\pi \div +\pi)$ ).

Dacă pentru ecuația (4.7) se consideră condițiile inițiale  $p(0) = p_0$  și  $\dot{p}(0) = 0$ , atunci soluția acesteia are forma:

$$p(t') = p_0 e^{-\frac{\gamma_0}{2} t'} \left( \cos \omega_1 t' + \frac{\gamma_0}{2\omega_1} \sin \omega_1 t' \right)$$

În cazul domeniului optic ( $\gamma_0 \ll \omega_0$ ), această soluție are forma:

$$p(t') = p_0 e^{-\frac{\gamma_0}{2} t'} \cos \omega_0 t'$$

Considerând elongația momentului de dipol la momentul  $t' = t - \frac{R}{c}$ :

$$p(t') = p_0 \exp \left[ -\frac{\gamma_0}{2} \left( t - \frac{R}{c} \right) \right] \exp \left\{ i \left[ \omega_0 \left( t - \frac{R}{c} \right) \right] \right\},$$

folosind relația (3.6a), se poate calcula elongația câmpului electric la momentul  $t$ , în punctul dispus la distanța  $R$  față de sistem:

$$e(R, t) =$$

$$= -\frac{\left( i k_0 - \frac{\gamma_0}{2c} \right)^2 p_0 \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 R} \exp \left[ -\frac{\gamma_0}{2} \left( t - \frac{R}{c} \right) \right] \exp \left\{ i \left[ \omega_0 \left( t - \frac{R}{c} \right) \right] \right\} n_\theta$$

Deoarece:  $k_0 \gg \gamma_0/c$ , această relație se poate scrie sub forma:

$$\begin{aligned} e(R, t) &\propto \frac{k_0^2 p_0 \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 R} \exp \left( -\frac{\gamma_0}{2} t \right) \exp [i(\omega_0 t - k_0 \cdot R)] n_\theta = \\ (4.10) \quad &= \frac{E'_0}{R} \exp \left( -\frac{\gamma_0}{2} t \right) \exp [i(\omega_0 t - k_0 \cdot R)] n_\theta = \\ &= E_0 \exp \left( -\frac{\gamma_0}{2} t \right) \exp [i(\omega_0 t - k_0 \cdot R)] n_\theta \end{aligned}$$

unde  $E_0$  reprezintă amplitudinea inițială a intensității câmpului electric la distanța  $R$  față de sursă (mărimea  $E$  se exprimă în  $V/m$ , în timp ce  $E'_0$  se exprimă în  $V$ ).

Din cele prezentate rezultă că dacă nu există alte mecanisme de disipare a energiei, atunci creșterea inițială a energiei interne a sistemului considerat este regăsită în energia *em* radiată de către acesta. Acest proces poate modela din punct de vedere clasic unele caracteristici ale *emisiei spontane* de radiație *em* de către un sistem atomic sau de un ansamblu format din aceste sisteme.

## 4.2 Momentul de dipol electric al unui sistem aflat în câmp *em*.

Mișcarea particulelor încărcate cu sarcini electrice ale sistemului fizic considerat poate fi influențată prin intermediul forței descrise de relația (1.3) și de acțiunea unui câmp *em* extern. Forța de interacțiune magnetică poate fi neglijată față de cea electrică.

În continuare se va folosi noțiunea de *semnal analitic*, care utilizează exprimarea câmpului electric armonic sub forma:

$$e(\omega, t) = \text{Re} [\tilde{E}(\omega) e^{i\omega t}] = \frac{1}{2} [\tilde{E}(\omega) e^{i\omega t} + \tilde{E}^*(\omega) e^{-i\omega t}],$$

unde:  $\tilde{E}(\omega) = E(\omega) e^{i\varphi}$ ,  $E(\omega)$  reprezintă amplitudinea unei armonice de frecvență  $\omega$ , iar  $\varphi$  - faza unde. Mărimea  $\tilde{E}(\omega)$  reprezintă *fazorul unde* și conține informații atât despre amplitudinea unde cât și despre faza acesteia. Dacă se folosește definiția fazorului, expresia semnalului analitic devine:

$$\begin{aligned}
e(\omega, t) &= \frac{E(\omega)}{2} [e^{i(\omega t + \varphi)} + e^{-i(\omega t + \varphi)}] = \\
&= \frac{E(\omega)}{2} [\cos(\omega t + \varphi) + i \sin(\omega t + \varphi) + \cos(\omega t + \varphi) - i \sin(\omega t + \varphi)] = \\
&= E(\omega) \cos(\omega t + \varphi) = \operatorname{Re} [\tilde{E}(\omega) e^{i\omega t}]
\end{aligned}$$

Dacă asupra dipolului electric definit mai sus acționează un câmp *em* armonic caracterizat prin frecvența  $\omega$ , acesta induce în sistem un moment de dipol a cărui variație în timp este descrisă de ecuația diferențială:

$$(4.11) \quad \frac{d^2 p(t)}{dt^2} + \gamma_0 \frac{dp(t)}{dt} + \omega_0^2 p(t) = \frac{q^2}{m_q} e_p(\omega, t),$$

unde  $e_p(\omega, t)$  reprezintă proiecția vectorului intensitate câmp electric  $e(t)$  pe direcția vectorului  $p$  (în continuare se vor considera numai proiecțiile pe direcția  $X$ ).

Momentul de dipol indus în sistem ca rezultat al acțiunii câmpului extern, va fi reprezentat tot de o mărime armonică, caracterizată prin aceeași frecvență, de forma:

$$p(\omega, t) = \operatorname{Re} [\tilde{p}(\omega) e^{i\omega t}]$$

Introducând această mărime în ecuația (4.11) se obține expresia fazorului momentului de dipol:

$$(-\omega^2 + i\gamma_0\omega + \omega_0^2) \tilde{p}(\omega) = \frac{q^2}{m_q} \tilde{E}(\omega), \text{ de unde:}$$

$$(4.12) \quad \tilde{p}(\omega) = \frac{\frac{q^2}{m_q} \tilde{E}(\omega)}{(\omega_0^2 - \omega^2) + i\gamma_0\omega} = \tilde{\alpha}(\omega) \tilde{E}(\omega), \text{ unde:}$$

$$(4.13) \quad \tilde{\alpha}(\omega) = \frac{\frac{q^2}{m_q}}{(\omega_0^2 - \omega^2) + i\gamma_0\omega},$$

reprezintă *polarizabilitatea* sistemului fizic considerat. Această mărime exprimă intensitatea interacțiunii dintre câmpul *em* aplicat și dipolul electric definit prin caracteristicile lui  $(\omega_0, \gamma_0)$  (sau răspunsul dipolului electric la acțiunea câmpului *em* aplicat).

Din punct de vedere al electrodinamicii clasice, polarizabilitatea sistemului este funcție de frecvența câmpului excitator. Prezintă interes răspunsurile de intensitate relativ mare ale sistemului la acțiuni externe, adică cele dispuse în apropierea frecvenței

de rezonanță. Deoarece în domeniul optic lățimea benzii de interacțiune este relativ mică, sunt importante semnalele excitatoare ale căror frecvență îndeplinesc condiția:  $\omega \cong \omega_0$ . În aceste condiții se poate considera aproximația:

$$\omega_0^2 - \omega^2 = (\omega_0 + \omega)(\omega_0 - \omega) \cong 2\omega_0(\omega_0 - \omega),$$

iar relația (4.13) devine:

$$\tilde{\alpha}(\omega) = \alpha'(\omega) + i\alpha''(\omega) = \frac{q^2}{m_q} \frac{1}{2\omega_0(\omega_0 - \omega) + i\gamma_0\omega} =$$

$$= -\frac{q^2}{m_q \gamma_0 \omega_0} \frac{\frac{\omega - \omega_0}{\gamma_0/2}}{1 + \left(\frac{\omega - \omega_0}{\gamma_0/2}\right)^2} - i \frac{q^2}{m_q \gamma_0 \omega_0} \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega - \omega_0}{\gamma_0/2}\right)^2}$$

deci:

$$(4.14a) \quad \alpha'(\omega) = -\frac{q^2}{m_q \gamma_0 \omega_0} \frac{\frac{\omega - \omega_0}{\gamma_0/2}}{1 + \left(\frac{\omega - \omega_0}{\gamma_0/2}\right)^2},$$

$$(4.14b) \quad \alpha''(\omega) = -i \frac{q^2}{m_q \gamma_0 \omega_0} \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega - \omega_0}{\gamma_0/2}\right)^2}.$$

Existența părții imaginare a mărimii  $\tilde{\alpha}(\omega)$  implică faptul că oscilația momentului de dipol  $p(t)$  nu este în fază cu cea a câmpului perturbator. Defazarea acestor mărimi este:  $\operatorname{tg} \varphi = \frac{\gamma_0/2}{\omega - \omega_0}$ . Această defazare, a cărei valoare este determinată

de parametrii dipolului și de frecvența câmpului, se menține pe toată durata timpului de interacțiune dintre dipol și câmpul perturbator.

Ca rezultat al acțiunii câmpului exterior, o parte din energia acestuia este transferată în energia internă a sistemului. Acest proces modelează din punctul de vedere al electrodinamicii clasice "*procesul de absorbție de energie em*" de către sistemul considerat. Puterea medie transferată sistemului de către câmpul *em* într-un interval de timp egal cu o perioadă este dată de relația:

(4.15)

$$\begin{aligned}
\langle P \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T \dot{x}(t) F(t) dt = \\
&= \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{2} \left[ i\omega \tilde{X}(\omega) e^{i\omega t} - i\omega \tilde{X}^*(\omega) e^{-i\omega t} \right] \frac{q}{2} \left[ \tilde{E}(\omega) e^{i\omega t} + \tilde{E}^*(\omega) e^{-i\omega t} \right] dt = \\
&= \frac{i q \omega}{4} \int_0^T \left[ \tilde{X}(\omega) \tilde{E}^*(\omega) - \tilde{X}^*(\omega) \tilde{E}(\omega) \right] dt = \frac{i\omega}{4} \left[ p(\omega) \tilde{E}(\omega) - p^*(\omega) \tilde{E}^*(\omega) \right] = \\
&= \frac{i\omega}{4} \left[ \tilde{\alpha}(\omega) |\tilde{E}(\omega)|^2 - \alpha^*(\omega) |\tilde{E}(\omega)|^2 \right] = \\
&= \frac{i\omega}{4} |\tilde{E}(\omega)|^2 \left[ \alpha'(\omega) + i\alpha''(\omega) - \alpha'(\omega) + i\alpha''(\omega) \right] = \\
&= -\frac{\omega}{2} \alpha''(\omega) |\tilde{E}(\omega)|^2 = \frac{\pi q^2}{4 m_q} \frac{2}{\pi \gamma_0} \frac{1}{1 + \left( \frac{\omega - \omega_0}{\gamma_0/2} \right)^2} |\tilde{E}(\omega)|^2 = \\
&= \frac{\pi q^2}{4 m_q} |\tilde{E}(\omega)|^2 g_L(\omega_0, \omega)
\end{aligned}$$

unde funcția:

$$(4.16) \quad g_L(\omega_0, \omega) = \frac{2/\pi \gamma_0}{1 + \left( \frac{\omega - \omega_0}{\gamma_0/2} \right)^2} \quad [\text{sec}]$$

este normată, adică îndeplinește condiția:

$$(4.17) \quad \int_0^\infty g_L(\omega_0, \omega) d\omega = 1.$$

Din relația (4.14) rezultă că partea imaginară a polarizabilității  $\alpha''(\omega)$  descrie procesul de absorbție a energiei câmpului *em* de către dipol, iar funcția  $g_L(\omega, \omega_0)$  care descrie mărimea cuplajului dintre sistem și câmpul *em* la diferite frecvențe, reprezintă *conturul de absorbție* al dipolului electric. Conturul este caracterizat prin *lățime spectrală*, care reprezintă diferența dintre frecvențele cărora le corespund valori ale conturului egale cu jumătate din valoarea sa maximă:

$$\begin{aligned}
g_L(\omega_1) &= g_L(\omega_2) = \frac{g_L(\omega_0)}{2}, \\
\frac{2/\pi \gamma_0}{1 + \left( \frac{\omega_1 - \omega_0}{\gamma_0/2} \right)^2} &= \frac{2/\pi \gamma_0}{1 + \left( \frac{\omega_2 - \omega_0}{\gamma_0/2} \right)^2} = \frac{2/\pi \gamma_0}{2}, \\
(4.18) \quad \omega_0 - \omega_1 &= \omega_2 - \omega_1 = \frac{\gamma_0}{2} \quad \text{de unde,}
\end{aligned}$$

$$\Delta\omega_0 = 2 \frac{\gamma_0}{2} = \gamma_0.$$

Conturul prezintă o dependență puternică de diferența dintre frecvența câmpului *em* armonic excitator și cea a oscilațiilor libere ale sistemului, precum și de valoarea constantei de amortizare  $\gamma_0$ . Cu cât constanta de amortizare este mai mică, cu atât conturul de absorbție este mai ascuțit. Conform electrodinamicii clasice sistemul considerat este capabil să interacționeze cu câmpul *em* numai într-un singur domeniu de frecvențe. Utilizând notațiile introduse mai sus, expresiile (4.14 a,b) pot fi scrise sub forma:

$$\begin{aligned}
(a') \quad \alpha'(\omega) &= \alpha''(\omega_0) \frac{\omega - \omega_0}{\Delta\omega_0/2} g_L(\omega) \\
(b') \quad \alpha''(\omega) &= -\frac{\pi q^2}{2 m_q \omega_0} g_L(\omega) = \alpha''(\omega_0) g_L(\omega),
\end{aligned}$$

unde:  $-\frac{\pi q^2}{2 m_q \omega_0} = \alpha''(\omega_0)$ , reprezintă valoarea maximă a mărimii  $\alpha''(\omega)$ .

În fig. 6 sunt prezentate grafic mărimile  $g_L(\Delta x)$ , respectiv  $\Delta x g_L(\Delta x)$ ,

funcție de variabila  $\Delta x = \frac{\omega - \omega_0}{\Delta\omega_0}$ . Se observă că mărimea  $\Delta\omega_0$  definește

domeniul spectral în care interacțiunea dintre câmp și dipol, determinată de partea imaginară a polarizabilității, este cea mai intensă. Din acest punct de vedere domeniul spectral pe care dipolul își manifestă prezența prin partea reală a polarizabilității este egal cu câteva lățimi spectrale ale conturului de absorbție. Mărimea  $\alpha'(\omega)$  se anulează la rezonanță  $\alpha'(\omega_0) = 0$  și prezintă semne opuse pentru frecvențe simetrice față de rezonanță. La început variază cu frecvența aproximativ liniar, atingând valori extreme la



$\omega_{1,2} = \omega_0 \pm \frac{\omega_0}{2}$ , ca ulterior valoarea mărimii să scadă relativ lent. După cum se va stabili în cap. II, partea reală a polarizabilității dipolului electric -  $\alpha'(\omega)$  - este responsabilă de variația fazei câmpului *em*, determinată de interacțiunea acestuia cu dipolul.

Din cele prezentate rezultă că un câmp *em* armonic ( $\omega$ ) induce în sistemul considerat un moment de dipol, caracterizat prin aceeași frecvență și o amplitudine complexă  $\tilde{p}(\omega)$ , a cărei mărime este determinată de valoarea polarizabilității sistemului corespunzătoare frecvenței considerate. Momentului de dipol indus  $\tilde{p}(\omega)$ , conform relației (3.6a), îi corespunde un câmp *em* armonic secundar de aceeași frecvență emis de către acesta, a cărui componentă electrică, la distanța *R* în vid, este dată de relația:

$$(4.19) \quad e_{\text{sec}}(R, \omega, t) = -\frac{i^2 k_0^2 \omega^2 \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 c^2 R} n_\theta \tilde{\alpha}(\omega) \tilde{E}(\omega) \exp[i(\omega t - k_0 \cdot R)].$$

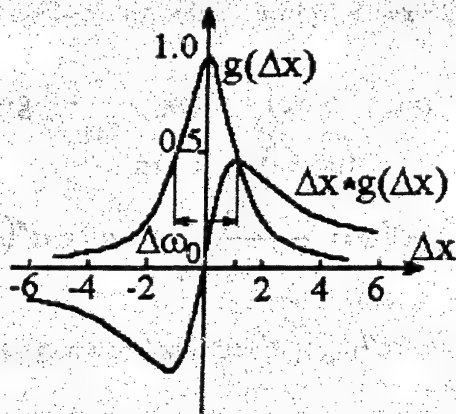


Fig. 6.

Conform legii conservării energiei, energia absorbită de către dipol de la câmpul *em* armonic excitator, este regăsită în câmpul *em* armonic secundar emis de către dipol, dacă acesta este considerat liber (lipsesc mecanismele de transfer a energiei interne a dipolului pe alte canale).

Dacă sistemul considerat este excitat de un câmp *em* constituit dintr-o succesiune continuă de câmpuri armonice, cu amplitudini egale, atunci în sistem sunt induse momente de dipol cu amplitudini diferite, conform conturului funcției  $\alpha''(\omega)$ ,

cărora le vor corespunde câmpuri secundare ale căror amplitudini sunt determinate de valorile polarizabilității  $\alpha''(\omega)$ . Câmpul total va fi dat de relația:

$$(4.20) \quad e_{\text{sec}}(R, t) = \frac{n_\theta \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 c^2 R} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\alpha}(\omega) \tilde{E}(\omega) \exp[i(\omega t - k_0 \cdot R)] d\omega,$$

unde integrala este diferită de zero pe domeniul de definiție a polarizabilității  $\tilde{\alpha}(\omega)$  a sistemului.

## 5. Radiația de dipol electric.

Pe baza relației (6.4) se poate calcula puterea instantanee a radiației emise de către un ansamblu de sarcini caracterizat prin momentul de dipol  $p(t')$ , într-un punct dispus la distanța *R* de acesta. Puterea instantanee este dată de valoarea instantanee a vectorului Poynting:

$$(5.1) \quad S(t) = \frac{1}{c\mu_0} e^2(t) S_0 = \frac{\sin^2 \theta}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3 R^2} \left[ \frac{d^2 p(t')}{dt'^2} \right]^2 S_0.$$

Din relația (5.1), ca și din (3.6), reiese că ansamblul de sarcini emite radiații optice în toate direcțiile, însă mărimea puterii instantanee a câmpului *em* depinde de unghiul format de direcția dipolului electric și direcția punctului în care se calculează. Valoarea maximă a puterii emise se obține pe direcția perpendiculară la direcția de

oscilație a momentului de dipol electric ( $\theta = \frac{\pi}{2}$ ) și este egală cu zero pe direcția dispusă de-a lungul acesteia. Reprezentarea grafică a dependenței puterii instantanee de unghiul  $\theta$  într-un plan caracterizat prin  $\phi = ct$ , cunoscută sub denumirea de *indicatrice de radiație* de dipol electric, este prezentată în fig. 7.

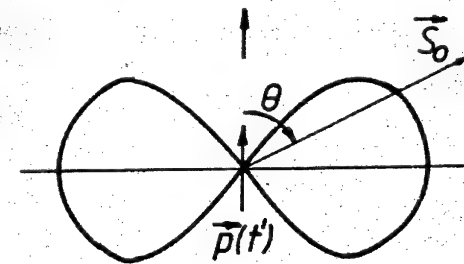


Fig. 7

Puterea instantanee totală radiată de către dipolul electric se obține prin integrarea puterii instantanee pe o sferă de rază  $R$ , care închide ansamblul de sarcini electrice:

(5.2)

$$P_{\text{inst. tot.}} = \frac{1}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3 R^2} |\ddot{p}(t')|^2 \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi R^2 \sin^3 \theta d\theta = \frac{1}{6\pi \epsilon_0 c^3} |\dot{p}(t')|^2.$$

În cazul modelului Lorentz, momentul de dipol variază conform legii mișcării armonice, frecvența mișcării fiind egală cu  $\omega_0$ , deci elongația momentului de dipol este:

$$p(t') = p_0 \cos \omega_0 t' = e r_0 \cos \omega_0 t', \text{ de unde:}$$

$$\ddot{p}(t') = -\omega_0^2 p_0 \cos \omega_0 t' = -\omega_0^2 p(t').$$

În acest caz puterea instantanee totală devine:

(5.3)

$$P_{\text{inst. tot.}} = \frac{\omega_0^4}{6\pi \epsilon_0 c^3} |p(t')|^2 = \frac{\omega_0^4 e^2 r_0^2}{6\pi \epsilon_0 c^3} \cos^2 \omega_0 t' = \frac{e^2}{6\pi \epsilon_0 c^3} |\dot{v}(t')|^2.$$

Puterea medie totală emisă de către dipolul Lorentz se obține prin medierea puterii instantanee pe o perioadă a mișcării:

$$(5.4) \quad \langle P_{\text{inst. tot.}} \rangle = \frac{\omega_0^4 e^2 r_0^2}{6\pi \epsilon_0 c^3} \langle \cos^2 \omega_0 t' \rangle = \frac{4\pi^3 v_0^4 e^2}{3\epsilon_0 c^3} |r_0|^2.$$

Chiar dacă dipolul este liber, puterea radiată face ca el să-și micșoreze energia internă, adică să execute o mișcare oscilatorie amortizată. Amortizarea este echivalentă cu lucrul mecanic efectuat asupra dipolului de o forță de "frecare". Expresia acestei forțe, cunoscută sub denumirea de "forță de frecare radiativă", se poate calcula utilizând considerente fenomenologice: lucrul mecanic efectuat de această forță, într-un

interval de timp  $\Delta t \gg \frac{1}{\omega}$ , trebuie să fie egal cu energia totală radiată de către dipol în același interval de timp, considerată cu semnul minus.

$$\int_0^{\Delta t} F_{\text{rad.}} v dt = - \int_0^{\Delta t} \frac{e^2}{6\pi \epsilon_0 c^3} |\dot{v}|^2 dt = \frac{e^2}{6\pi \epsilon_0 c^3} (\dot{v}v) \Big|_0^{\Delta t} - \int_0^{\Delta t} \ddot{v}v dt, \text{ sau:}$$

(deoarece  $v$  este o funcție periodică, primul termen din această expresie este egal cu zero)

$$\int_0^{\Delta t} \left[ F_{\text{rad.}} - \frac{e^2}{6\pi \epsilon_0 c^3} \ddot{v} \right] v dt = 0, \text{ de unde:}$$

$$(5.5) \quad F_{\text{rad.}} = \frac{e^2}{6\pi \epsilon_0 c^3} \ddot{v}.$$

Deoarece  $F_{\text{rad.}} \ll F_{\text{cvel}}$  (amortizarea dipolului este mică), pe intervale de timp relativ mari se poate considera, în primă aproximație, elongația acestuia de forma:

$$r(t') = r_0 \exp(i\omega_0 t'), \text{ deci: } \ddot{r}(t') = \ddot{v}(t') = -\omega_0^2 r(t') = -\omega_0^2 v(t'),$$

iar expresia "forței de frecare luminoasă" capătă forma (4.1):

$$F_{\text{rad.}} = -\frac{e^2 \omega_0^2}{6\pi \epsilon_0 c^3} v(t') = -\gamma_0 m_e v(t'), \text{ unde:}$$

$$(5.6) \quad \gamma_0 = \frac{e^2 \omega_0^2}{6\pi \epsilon_0 c^3 m_e},$$

reprezintă expresia coeficientului de amortizare radiativă. Apare expresia unei forțe rezistive, care în condițiile impuse, este proporțională cu viteza de deplasare a sarcinii electrice.

Dacă se consideră un dipol electric de tipul modelului Lorentz a cărui radiație este caracterizată prin  $\lambda_0 = 500 \text{ nm}$  ( $\nu_0 = 6.10^{14} \text{ Hz}$  -domeniul vizibil al spectrului), coeficientul de amortizare radiativă al acestuia este  $0.88 \cdot 10^8 \text{ s}^{-1}$ , timpul de relaxare  $T_1 = 2.27 \cdot 10^{-8} \text{ s}$ , iar lățimea spectrală radiativă a semnalului emis  $\Delta \nu_0 = 0.14 \cdot 10^8 \text{ Hz}$ . În cazul radiației cu  $\lambda_0 = 1.25 \text{ cm}$  ( $\nu_0 = 24.87 \cdot 10^9 \text{ Hz}$  -domeniul IR îndepărtat al spectrului - molecula de  $\text{NH}_3$ )

se obține  $\gamma_0 = 0.152 \text{ s}^{-1}$ ,  $T_1 = 17.36 \text{ s}$  și  $\Delta \nu_0 = 2.4 \cdot 10^{-2} \text{ Hz}$ . Deoarece lățimea spectrală radiativă a radiației emise depinde de frecvență, valoarea ei în domeniul microundelor este mult mai mică față de cea din domeniul optic.

Domeniul de aplicație a condiției  $F_{\text{cvel}} \gg F_{\text{rad}}$  este foarte larg. Din această condiție rezultă:

$$m_e \omega_0^2 r(t') \gg \frac{e^2 \omega_0^3}{6\pi \epsilon_0 c^3} r(t') = \frac{e^2 \omega_0^2}{3\epsilon_0 c^2 \lambda_0} r(t'),$$

de unde:

$$\lambda_0 \gg \frac{e^2}{3\epsilon_0 c^2 m_e} = r_e,$$

unde  $\lambda_0$  -lungimea de undă a radiației emise, iar  $r_e = 1,4 \cdot 10^{-14}$  m reprezintă raza clasică a electronului. Această condiție este îndeplinită pe tot domeniul de frecvențe al radiațiilor optice (chiar și pentru frecvențele din domeniul- $\gamma$ ).

## 6. Mărimi caracteristice ale radiației em optice.

În domeniul de frecvențe a radiației optice limitat aprox. de valorile:  $\nu_1 = 1,5 \cdot 10^{13}$  Hz ( $\lambda_1 = 20 \mu\text{m}$ ) și  $\nu_2 = 1,6 \cdot 10^{15}$  Hz ( $\lambda_2 = 180 \mu\text{m}$ ), nu există receptori de radiație și dispozitive de înregistrare care să poată urmări valorile instantanee ale câmpului electric. Dispozitivele electronice actuale pot înregistra numai variații ale intensității câmpului electric care au loc într-un interval de timp de ordinul a  $10^{-11}$  sec. În acest interval de timp dispozitivul înregistrează numai valoarea medie a intensității câmpului electric al radiației optice, adică valoarea medie a aprox.  $10^4$  oscilații.

Dacă se consideră că, din anumite cauze, procesul de emisie a câmpului em de către dipol este fragmentat în intervale de timp  $\Delta t = 2t_1 \ll T_1$ , atunci, pe aceste intervale, amplitudinea intensității câmpului electric poate fi considerată constantă, iar elongația este descrisă de relația:

$$(6.1) \quad e(\mathbf{R}, t) = E(t) \exp[-ik_0 \cdot \mathbf{R}] \exp[-i(\omega_0 t + \varphi_0)], \text{ unde:}$$

$$E(t) = ct \text{ pentru } : -t_1 \leq t \leq t_1, \text{ respectiv:}$$

$$E(t) = 0 \text{ pentru } : t < -t_1 \text{ și } t > t_1$$

Pe acest interval de timp, valoarea medie a intensității câmpului electric este:

$$\langle e(\mathbf{R}, t) \rangle = \frac{1}{\Delta t} \int_{-t_1}^{+t_1} E(t) \exp[-ik_0 \cdot \mathbf{R}] \exp[-i(\omega_0 t + \varphi_0)] dt = 0$$

(relația este valabilă numai dacă  $\Delta t \gg T$ , condiție ce este îndeplinită în domeniul radiațiilor optice). Deoarece valoarea medie este egală cu zero, receptorii nu pot înregistra o mărime fizică proporțională cu elongația intensității câmpului electric.

Valoarea medie a pătratului elongației câmpului electric al aceluiași semnal, în același interval de timp, este:

$$(6.2) \quad \langle e^2(\mathbf{R}, t) \rangle = \frac{1}{\Delta t} \int_{-t_1}^{+t_1} E^2(t) \exp[-i(\omega_0 t - \mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{R} + \varphi_0)] \times \\ \times \exp[i(\omega_0 t - \mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{R} + \varphi_0)] dt = E_0^2$$

Această valoare, proporțională cu pătratul amplitudinii intensității câmpului electric, fiind diferită de zero, este o mărime măsurabilă.

Sarcinile electrice aflate în câmp em sunt supuse unei forțe descrisă de relația (1.3), deci în domeniul unde sunt dispuse este prezentă o cantitate de energie em caracteristică câmpului. Această energie este caracterizată prin densitatea de energie, definită ca fiind energia câmpului em prezentă în unitatea de volum centrată în punctul în care se calculează. Densitatea de energie a câmpului em la momentul  $t$  este dată de relația:

$$(6.3) \quad w(t) = \frac{1}{2\mu_0} [\mathbf{b}(t) \cdot \mathbf{b}(t)] + \frac{\epsilon_0}{2} [\mathbf{e}(t) \cdot \mathbf{e}(t)] = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} e^2(t).$$

Dacă câmpul em se propagă în spațiu, atunci trebuie admis că la propagarea lui se transportă o cantitate de energie. Transportul de energie em se exprimă printr-un câmp vectorial  $\mathbf{S}$  (vectorul Poynting). Direcția și sensul vectorului Poynting indică direcția și sensul de transport al energiei em, valoarea instantanee a acestei mărimi fiind dată de relația:

$$(6.4) \quad \mathbf{S}(t) = \frac{1}{\mu_0} [\mathbf{e}(t) \times \mathbf{b}(t)] = \frac{1}{c\mu_0} e^2(t) \mathbf{S}_0 = w(t) c \mathbf{S}_0.$$

Deoarece modulul vectorului Poynting este proporțional cu pătratul elongației intensității câmpului electric, valoarea medie în timp a acestei mărimi este diferită de zero, prin urmare toate mărimile fizice proporționale cu modulul acestuia vor fi mărimi măsurabile.

Se introduce noțiunea de flux elementar mediu ( $d\Phi$ ) care este egală cu valoarea medie a cantității de energie em transportată în unitate de timp, printr-un element de suprafață, centrat în punctul în care se face aprecierea, de arie  $d\Sigma$  și orientat prin versorul  $\mathbf{N}$ , pe direcție normală la această suprafață:

$$(6.5) \quad d\Phi = \langle \mathbf{S} \cdot \mathbf{N} \rangle d\Sigma$$

și cea de densitate de flux de energie -  $\varphi(\mathbf{R})$  - o mărime numeric egală cu valoarea medie a cantității de energie transportată în unitate de timp printr-o arie elementară ( $d\Sigma$ ), care conține punctul, orientată perpendicular pe direcția de transport a energiei ( $\mathbf{S}_0$  paralel cu  $\mathbf{N}$ ) și calculată pentru unitate de arie:

$$(6.6) \quad \varphi(\mathbf{R}) = \frac{d\Phi}{d\Sigma} = \langle \mathbf{S} \cdot \mathbf{N} \rangle = \langle \mathbf{S} \rangle (\mathbf{S}_0 \cdot \mathbf{N}).$$



Deci densitatea de flux reprezintă valoarea medie a mărimii vectorului Poynting, fiind o mărime scalară. Fluxul total al radiației optice care traversează o suprafață de arie ( $\Sigma$ ), este dat de relația:

$$(6.7) \quad \Delta\Phi = \int_{\Sigma} \varphi(\mathbf{R}) d\Sigma = \int_{\Sigma} \langle \mathbf{S} \rangle (\mathbf{S}_0 \cdot \mathbf{N}) d\Sigma.$$

Pentru a studia propagarea radiațiilor optice se introduce noțiunea de "rază" de radiație optică, care reprezintă traiectoria de transport a energiei *em*; traiectoria îndeplinește condiția că în fiecare punct al spațiului prin care trece este tangentă la vectorul Poynting, calculat în acel punct. Prin urmare vectorul Poynting descrie în fiecare punct din spațiu direcția și sensul transportului de energie *em*, iar prin valoarea medie a modulului exprimă densitatea de flux asociată razei de radiație optică în punctul considerat.

Un ansamblu infinit de raze de radiație optică, care îndeplinește anumite condiții geometrice, formează un *fascicul de raze*. Din acest punct de vedere, unda *em* corespunde fascicului de raze de radiație optică, iar acesta este caracterizat prin fluxul de energie.

O funcție periodică limitată în timp, de ex. de tipul celei definite de relația (6.1), poate fi exprimată prin integrale Fourier, conform relațiilor (4.8 a,b):

$$(a) \quad e(\mathbf{R}, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} E(\mathbf{R}, \nu) e^{i2\pi\nu t} d\nu = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} E(\mathbf{R}, \nu) e^{i\omega t} d\omega,$$

unde  $E(\mathbf{R}, \nu)$  reprezintă amplitudinile armonicilor constituente ale semnalului, fiind date de relația:

$$(b) \quad E(\mathbf{R}, \nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} e(\mathbf{R}, t) e^{-i2\pi\nu t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e(\mathbf{R}, t) e^{-i\omega t} dt$$

Din relația (a) rezultă:  $e(\mathbf{R}, t) \propto E(\mathbf{R}, \nu) \Delta\nu \Rightarrow E(\mathbf{R}, \nu) \propto \frac{e(\mathbf{R}, t)}{\Delta\nu}$ ,

ceea ce verifică relația (b):  $E(\mathbf{R}, \nu) \propto e(\mathbf{R}, t) \Delta t$  și conduc la:  $\Delta t \Delta\nu \approx 1$ , deci mărimea  $E(\mathbf{R}, \nu)$  se măsoară în  $\frac{V}{m \cdot Hz}$ .

Densitatea de flux, conform relațiilor (6.4, 6.6) și folosind dezvoltarea Fourier a semnalului considerat, se poate scrie sub forma:

(6.8)

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{R}) &= \frac{1}{\Delta t} \int_{-t_1}^{+t_1} \frac{1}{c\mu_0} e^2(t) dt = \frac{1}{c\mu_0 \Delta t} \int_{-t_1}^{+t_1} e(\mathbf{R}, t) dt \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{E}(\mathbf{R}, \omega) e^{i\omega_0 t} d\omega = \\ &= \frac{1}{c\mu_0 \Delta t} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{E}(\mathbf{R}, \omega) d\omega \int_{-t_1}^{+t_1} e(\mathbf{R}, t) e^{i\omega_0 t} dt = \\ &= \frac{1}{c\mu_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tilde{E}(\mathbf{R}, \omega) \tilde{E}^*(\mathbf{R}, \omega)}{\Delta t} d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\mathbf{R}, \omega) d\omega, \end{aligned}$$

unde s-a notat:

$$\tilde{E}^*(\mathbf{R}, \omega) = \int_{-t_1}^{+t_1} e(\mathbf{R}, t) e^{i\omega_0 t} dt \text{ și}$$

$$\varphi(\mathbf{R}, \omega) = \frac{1}{c\mu_0} \frac{\tilde{E}(\mathbf{R}, \omega) \tilde{E}^*(\mathbf{R}, \omega)}{\Delta t}$$

Pe baza relației (6.8) se poate defini mărimea fizică:

$$(6.9) \quad \varphi(\mathbf{R}, \omega) = \frac{d\varphi(\mathbf{R})}{d\omega},$$

denumită *densitate spectrală de flux*  $\left( \frac{W}{m^2 \cdot Hz} \right)$  de energie *em*. Aceasta reprezintă o mărime numeric egală cu densitatea de flux corespunzătoare armonicilor cu frecvențe cuprinse în intervalul  $\left( \omega - \frac{d\omega}{2} \div \omega + \frac{d\omega}{2} \right)$ , calculată pentru intervalul unitate de frecvență, iar fluxul spectral total este dat de relația:

$$(6.10) \quad \Delta\Phi(\mathbf{R}, \omega) = \int_{\Sigma} \varphi(\mathbf{R}, \omega) (\mathbf{S}_0 \cdot \mathbf{N}) d\Sigma.$$

Dacă se consideră o sursă punctiformă, căreia îi corespunde o undă sferică, se obțin relațiile:

$$(6.11) \quad \varphi(\mathbf{R}, \omega) = \frac{1}{c\mu_0} \frac{\tilde{E}(\mathbf{R}, \omega) \tilde{E}^*(\mathbf{R}, \omega)}{\Delta t} = \frac{1}{c\mu_0 R^2 \Delta t} E'^2(\omega) = \frac{I(\omega)}{R^2},$$

unde:

$$I(\omega) = \frac{1}{c\mu_0} \frac{E'^2(\omega)}{\Delta t}$$

$$(6.12) \quad \varphi(\mathbf{R}) = \frac{1}{R^2} \frac{1}{c\mu_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{E'^2(\omega)}{\Delta t} d\omega = \frac{I}{R^2}, \text{ de unde:}$$

$$(6.13) \quad d\Phi = \varphi(\mathbf{R})d\Sigma = \frac{I}{R^2} (\mathbf{S}_0 \cdot \mathbf{N})d\Sigma, \text{ deci:}$$

$$I = \frac{d\Phi}{d\Omega} \left( \frac{W}{\text{str}} \right) \text{ unde: } d\Omega = \frac{(\mathbf{S}_0 \cdot \mathbf{N})d\Sigma}{R^2}$$

Intensitatea radiației optice este o mărime numeric egală cu fluxul de radiație optică care corespunde unui unghi solid elementar orientat pe direcția de propagare dată, calculat pentru unitatea de unghi solid. La fel se poate introduce noțiunea de intensitate spectrală a radiației optice ca fiind o mărime numeric egală cu fluxul spectral corespunzător unui unghi solid elementar, orientat pe direcția de propagare a radiației și calculat pentru unitate de unghi solid. Intensitatea de radiație optică, ca și densitatea de flux, poate caracteriza procesul de transport de energie *em* de-a lungul unei raze de radiație optică.

## 7. Structura spectrală a semnalelor *em*

### 7.1 Câmpul *em* emis de către un dipol electric liber amortizat

Câmpul *em* emis de către un dipol electric liber amortizat (fig. 3), conform relației (4.10), este de forma:

$$e(t) = \text{Re} \left\{ \tilde{E}_0 e^{-\frac{\gamma_0}{2}t} e^{i\omega_0 t} \right\} \quad t \geq 0$$

$$e(t) = 0 \quad t < 0$$

Amplitudinile componentelor armonice ale câmpului emis sunt date de relațiile:

$$(7.1) \quad \tilde{E}(\omega) = \tilde{E}_0 \int_0^{+\infty} e^{-\frac{\gamma_0}{2}t} e^{i(\omega_0 - \omega)t} dt =$$

$$= \frac{\tilde{E}_0}{-\left[\frac{\gamma_0}{2} + i(\omega - \omega_0)\right]} e^{\left[\frac{\gamma_0}{2} + i(\omega - \omega_0)\right]t} \Bigg|_0^{+\infty} = \frac{\tilde{E}_0}{\frac{\gamma_0}{2} + i(\omega - \omega_0)}$$

iar densitatea spectrală de flux este:

$$(7.2) \quad \varphi(\omega) = \frac{\tilde{E}_0^2}{c\mu_0\Delta t_0} \frac{1}{(\omega - \omega_0)^2 + \left(\frac{\gamma_0}{2}\right)^2}$$

Funcția  $\frac{1}{(\omega - \omega_0)^2 + \left(\frac{\gamma_0}{2}\right)^2}$  descrie distribuția după frecvență a

densităților spectrale de flux ale amplitudinilor componentelor Fourier constituente ale semnalului considerat. De obicei această funcție se alege astfel încât să îndeplinească condiția de normare (4.17). Deoarece:

$$\int_0^{+\infty} \frac{d\omega}{(\omega - \omega_0)^2 + \left(\frac{\gamma_0}{2}\right)^2} =$$

$$= \frac{2}{\left[4\left(\omega_0^2 + \frac{\gamma_0^2}{4}\right) - 4\omega_0^2\right]^{1/2}} \arctg \frac{2(\omega - \omega_0)}{\left[4\left(\omega_0^2 + \frac{\gamma_0^2}{4}\right) - 4\omega_0^2\right]^{1/2}} \Bigg|_0^{+\infty} =$$

$$= \frac{2}{\gamma_0} \arctg \frac{2(\omega - \omega_0)}{\gamma_0} \Bigg|_0^{+\infty} = \frac{2}{\gamma_0} \left( \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) = \frac{2\pi}{\gamma_0}$$

unde:  $\arctg \frac{\omega_0}{\gamma_0} \Rightarrow \frac{\pi}{2}$  ( $\omega_0 \gg \gamma_0$ ), funcția normată care descrie structura spectrală a

câmpului *em* emis de către dipolul liber amortizat are forma:

$$(7.3) \quad g_L(\omega, \omega_0) = \frac{\gamma_0}{2\pi} \frac{1}{(\omega - \omega_0)^2 + \left(\frac{\gamma_0}{2}\right)^2} =$$

$$= \frac{2}{\Delta\omega_0\pi} \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega - \omega_0}{\Delta\omega_0/2}\right)^2} = \frac{g_L(\omega_0)}{1 + \left(\frac{\omega - \omega_0}{\Delta\omega_0/2}\right)^2}$$

Această funcție, reprezentată în fig. , este caracterizată prin valoarea maximă:

$$g_L(\omega_0) = \frac{2}{\pi\Delta\omega_0} = \frac{0,637}{\Delta\omega_0}$$

și prin lățimea spectrală obținută din condiția:

$$g_L(\omega_1) = g_L(\omega_2) = \frac{g_L(\omega_0)}{2}, \text{ de unde: } \omega_1 - \omega_0 = \frac{\gamma_0}{2},$$

deci lățimea spectrală este:

$$(7.4) \quad \Delta\omega_0 = \omega_1 - \omega_2 = 2 \frac{\gamma_0}{2} = \gamma_0 = \frac{2}{T_1}$$

și este cunoscută sub denumirea de *lățime naturală* sau *lățime radiativă*. Conturul de această formă este cunoscut sub denumirea de *conturul radiativ* sau *conturul Lorentz*.

Expresia densității spectrale de flux, corespunzătoare dipolului electric liber amortizat, devine:

$$(7.5) \quad \varphi(\omega) = \frac{2\pi E_0^2}{c\mu_0 \Delta t_0 \Delta\omega_0} g_L(\omega, \omega_0) \left( \frac{W}{m^2 \text{ Hz}} \right)$$

Comparând relația (4.16) cu (6.10) se constată coincidența conturului normat de absorbție al dipolului liber amortizat cu cel de emisie al aceluiași dipol.

## 7.2 Câmpul em de durată finită

Câmpul em de durată finită ( $\Delta t = 2t_1$ ), conform relației (6.1), este de forma:

$$e(t) = \text{Re} \left\{ E_0 e^{i(\omega_0 t + \varphi_0)} \right\} = \text{Re} \left\{ \tilde{E}_0 e^{i\omega_0 t} \right\} \quad -t_1 \leq t \leq t_1$$

$$e(t) = 0 \quad t < -t_1 \text{ și } t > t_1$$

unde amplitudinea  $E_0$  este considerată constantă (fig. 8). Amplitudinile armonicilor Fourier ale semnalului sunt date de relațiile:

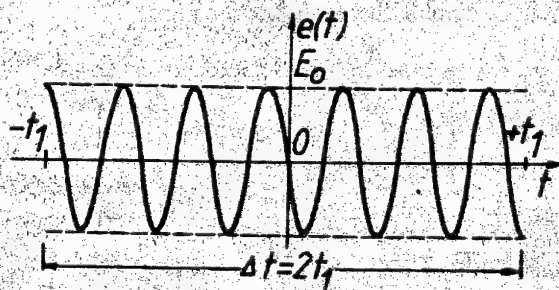


Fig. 8

$$(7.6) \quad \tilde{E}(\omega) = \tilde{E}_0 \int_{-t_1}^{+t_1} e^{i(\omega_0 - \omega)t} dt =$$

$$= \tilde{E}_0 \frac{e^{i(\omega_0 - \omega)t_1} - e^{-i(\omega_0 - \omega)t_1}}{2i(\omega_0 - \omega)} \Delta t = \tilde{E}_0 \Delta t \frac{\sin[(\omega_0 - \omega)t_1]}{(\omega_0 - \omega)t_1}$$

iar densitatea spectrală de flux:

$$(7.7) \quad \varphi(\omega) = \frac{1}{c\mu_0} \frac{\tilde{E}(\omega) \tilde{E}^*(\omega)}{\Delta t_0} =$$

$$= \frac{1}{c\mu_0} \frac{E_0^2 (\Delta t)^2 \sin^2[(\omega_0 - \omega)t_1]}{\Delta t_0 [(\omega_0 - \omega)t_1]^2} = \frac{E_0^2 (2t_1)^2}{c\mu_0 \Delta t_0} g(\omega_0, \omega)$$

( $\Delta t_0$  reprezintă timpul de mediere; în cazul semnalului definit de (6.1) se poate considera  $\Delta t = 2t_1$ ), unde  $g(\omega_0, \omega)$  reprezintă funcția de distribuție spectrală caracteristică semnalului considerat.

Din relația (7.2) rezultă că un câmp em de durată finită prezintă proprietățile spectrale ale unui câmp obținut prin suprapunerea unui număr infinit de câmpuri armonice, necorelate între ele printr-o relație de fază (faza câmpurilor armonice componente poate lua cu probabilitate egală orice valoare din domeniul  $(-\pi \div +\pi)$ , cu amplitudini diferite pentru frecvențe diferite. Reprezentarea grafică a funcției de distribuție spectrală a semnalului este dată în fig. 9b, iar în fig. 9a este prezentată distribuția spectrală a amplitudinilor Fourier ale acestuia. Rezultă că există o armonică de bază ( $\omega_0$ ) cărei îi corespunde densitatea de flux maximă ( $\varphi_0$ ), iar celelalte armonici sunt dispuse simetric față de frecvența  $\omega_0$ , densitatea de flux descrescând pe măsură ce crește diferența frecvenței lor față de frecvența armonicii de bază. Pentru a delimita domeniul de frecvențe al armonicilor al căror efect nu poate fi neglijat în acțiunea radiațiilor optice, prin convenție sunt considerate drept limite valorile  $\omega_1$  și  $\omega_2$  ale frecvențelor pentru care valoarea densității de flux este egală cu jumătate din valoarea densității de flux a armonicii de bază. Se poate considera că intervalul de frecvențe ( $\nu_1 - \nu_2$ ) este aprox. egal cu intervalul cuprins între  $\nu_0$  și  $\nu'$  - frecvența pentru care valoarea densității spectrale este egală cu zero:

$$\Delta\nu = \nu_1 - \nu_2 \cong \nu_0 - \nu'$$

Dar:  $g(\nu') = 0$ , dacă:  $(\omega_0 - \omega')t_1 = \pi$ , de unde:

$$(7.8) \quad \Delta\nu = \nu_0 - \nu' = \frac{1}{2t_1}$$



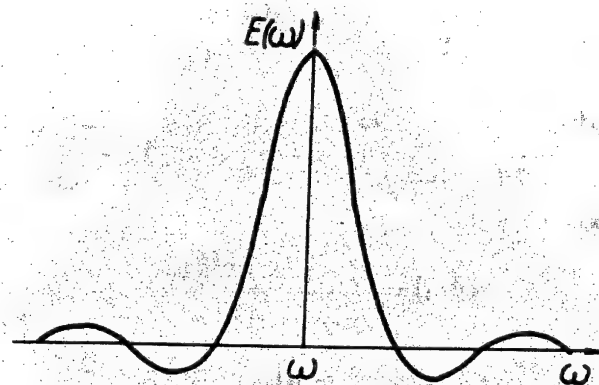


Fig. 9a

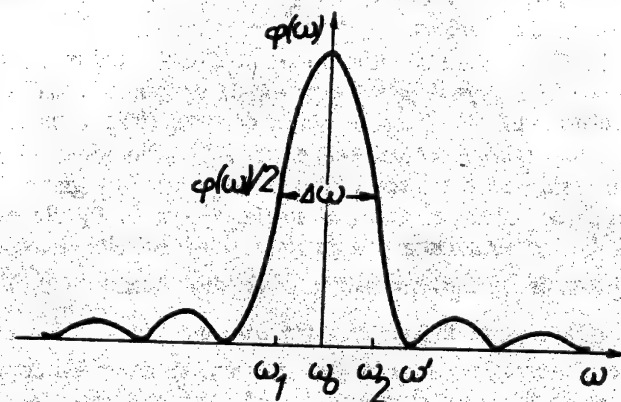


Fig. 9b

Mărimea  $\Delta\nu = \frac{1}{2t_1}$  reprezintă lățimea spectrală a semnalului considerat.

Dacă valoarea intervalului  $2t_1$  tinde la infinit, valoarea lățimii spectrale tinde la zero, adică se obține cazul unei armonice. Expresia lățimii spectrale exprimată în lungimi de undă are forma:

$$\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1 = c \left( \frac{1}{\nu_2} - \frac{1}{\nu_1} \right) \approx c \frac{\Delta\nu}{\nu_0^2}.$$

Relația (7.8) arată că micșorarea duratei câmpului *em* determină creșterea lățimii spectrale. Un câmp de durată finită, deoarece poate fi exprimat printr-o infinitate de unde armonice, necorelate, cu frecvențele cuprinse într-un domeniu spectral dat, se numește *grup (pachet) de unde*.

## Cap. II

### CÂMPUL RADIAȚIILOR OPTICE

Pentru a descrie câmpul radiației optice este necesar să se cunoască următoarele caracteristici ale acestuia:

- caracteristici geometrice;
- caracteristici spectrale;
- caracteristici de coerență temporală și spațială;
- caracteristici de polarizare.

Analiza acestor caracteristici se poate realiza dacă se apelează la niște modele fizice de bază.

#### 1. Caracteristici geometrice

Pentru a analiza această problemă este necesar să se considere atât structura sursei care emite radiație optică, cât și cea a câmpului emis de sursă. Sursele de radiație optică prezintă o extensie tridimensională, conținând un număr foarte mare de emițători de radiație (din punct de vedere clasic - dipolul electric, corespunzător din punct de vedere cuantic - sistemul cuantic cărui i s-a asociat dipolul electric).

Pentru a modela sursa de radiație optică se introduce modelul de sursă punctiformă. Dimensiunile acestui model sunt astfel alese încât să îndeplinescă condițiile impuse de aproximația de dipol electric: diferența de fază dintre câmpurile emise de dipolii localizați la marginile opuse ale sursei să fie neglijabilă, prin urmare dimensiunile sursei trebuie să fie mult mai mici decât lungimea de undă a radiației emise (vezi prg. I 2). Sursă extinsă de radiație optică se divizează în surse punctiforme, iar rezultatul final se obține prin integrare asupra dimensiunilor acesteia. Dacă se consideră o sursă extinsă bidimensională, atunci aceasta se divide în "surse punctiforme bidimensionale".

După cum s-a stabilit în prg. I 3, modelul de dipol electric oscilant, model ce îndeplinește condițiile de sursă punctiformă (aproximația de dipol electric), emite câmp *em* sub formă de unde sferice, centrate în punctul unde este localizat modelul. Modelul

de sursă punctiformă conține un număr finit de dipoli electrici. Câmpul *em* radiat de acest model poate fi considerat tot sub formă de undă sferică, iar intensitatea componentei electrice, într-un punct dat al spațiului, se obține prin sumarea câmpurilor elementare emise de către toți dipolii sursei punctiforme. (La sumare, deoarece sursa este punctiformă, se poate neglija variația fazei câmpului elementar determinată de dispunerea dipolilor în interiorul sursei). Componenta electrică a câmpului *em* creat de către sursa extinsă într-un punct dat al spațiului se calculează prin integrare asupra tuturor surselor punctiforme în care a fost divizată sursa extinsă.

În cadrul opticii geometrice, pentru a descrie propagarea câmpului *em* se folosește modelul de rază de radiație optică (traectoria de propagare a energiei câmpului *em*). Câmpul *em* dintr-un domeniu spațial oarecăr va fi descris de o distribuție continuă de raze de radiație optică. Această distribuție formează un fascicul de raze optice, care poate fi descris dacă se introduc niște modele.

Din acest punct de vedere radiația optică emisă de o sursă punctiformă este modelată printr-un fascicul divergent. Focarul acestui fascicul este centrat în sursa punctiformă, iar dimensiunile laterale sunt limitate de deschiderea elementelor optice care diafragmează fasciculul. În mod corespunzător în focarul unui fascicul convergent se va forma imaginea unei surse punctiforme. Trecerea de la modelul de fascicul divergent la cel convergent se realizează prin modelul fasciculului de raze paralele. Acestuia îi corespunde o sursă punctiformă dispusă la o distanță infinit de mare față de punctul unde se analizează câmpul, respectiv o imagine punctiformă dispusă la o distanță infinit de mare față de același punct. Un fascicul oarecare de raze optice poate fi considerat ca fiind constituit dintr-o infinitate de fascicule paralele cu înclinări diferite față de axa optică.

Fasciculul divergent, respectiv convergent, de raze optice i se asociază o undă sferică a cărei centru este dispus în sursa punctiformă.

Prin urmare dacă se consideră o sursă extinsă, într-un punct dat al spațiului, intensitatea componentei electrice a câmpului *em* reprezintă integrala asupra tuturor undelor, respectiv a tuturor razelor ce se intersectează în acel punct.

#### 2. Structura spectrală

Pentru a descrie structura spectrală a câmpului radiațiilor optice se introduc următoarele modele.

1. Modelul cel mai simplu este cel al câmpului descris prin unde armonice plane sau sferice. Elongația câmpului este reprezentată printr-o funcție de undă care prezintă o dependență armonică de timp:

$$(2.1) \quad e(\omega, \mathbf{r}, t) = E(\mathbf{r}) \cos[\omega t + \phi(\mathbf{r})].$$

Câmpul real poate fi reprezentat și printr-o funcție complexă:

$$\tilde{e}(\omega, \mathbf{r}, t) = E(\mathbf{r}) e^{i\phi(\mathbf{r})} e^{i\omega t} = \tilde{E}(\mathbf{r}) e^{i\omega t}, \text{ sau:}$$

$$(2.2) \quad e(\omega, \mathbf{r}, t) = \operatorname{Re}\{\tilde{e}(\omega, \mathbf{r}, t)\} = \frac{1}{2} [\tilde{e}(\omega, \mathbf{r}, t) + \tilde{e}^*(\omega, \mathbf{r}, t)].$$



Mărimea  $\tilde{e}(\omega, \mathbf{r}, t)$ , cunoscută sub denumirea de *funcție de undă complexă* sau *semnal analitic* realizează descrierea completă a unei armonice. Mărimea  $\tilde{E}(\mathbf{r}) = E(\mathbf{r})e^{i\phi(\mathbf{r})}$  reprezintă amplitudinea complexă sau fazorul elongației complexe. Funcția de undă  $e(\omega, \mathbf{r}, t)$  se poate scrie sub forma:

$$(2.2) \quad e(\omega, \mathbf{r}, t) = \operatorname{Re} \left\{ \tilde{E}(\mathbf{r}) e^{i\omega t} \right\} = \frac{1}{2} \left[ \tilde{E}(\mathbf{r}) e^{i\omega t} + \tilde{E}(\mathbf{r})^* e^{-i\omega t} \right].$$

Într-un punct dat  $\mathbf{r}$  al spațiului, folosind descrierea complexă, amplitudinea complexă  $\tilde{E}(\mathbf{r}, t)$  se reprezintă prin mărimea (modulul -  $|\tilde{E}(\mathbf{r})| = E(\mathbf{r})$ ) amplitudinii unei câmpului, iar argumentul  $\arg \{ \tilde{E}(\mathbf{r}) \} = \phi(\mathbf{r})$  reprezintă faza câmpului. În aceeași descriere, funcția de undă complexă  $\tilde{e}(\omega, \mathbf{r}, t)$ , se reprezintă grafic printr-un fazor care se rotește cu o viteză unghiulară egală cu pulsația undei (fig. 10).

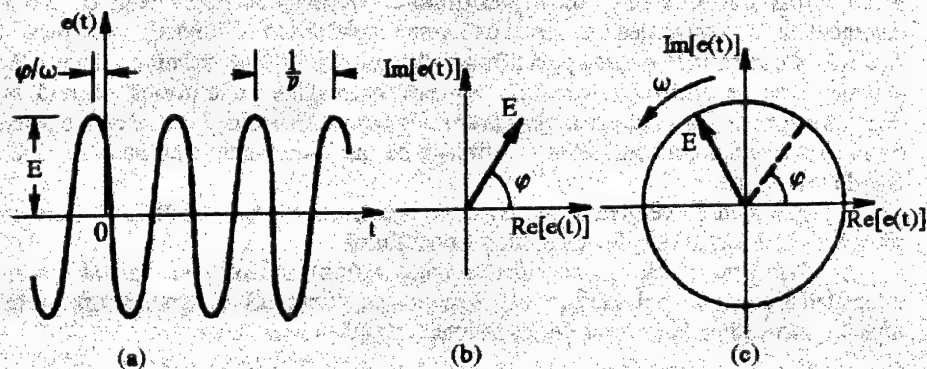


Fig. 10.

Funcția de undă armonică reprezintă un model ideal, deoarece este definită pe domeniul de existență  $-\infty < t < +\infty$  al variabilei  $t$ . Pe acest domeniu valoarea amplitudinii funcției este constantă. Două sau mai multe funcții armonice cu aceeași pulsație, se deosebesc între ele prin valoarea fazei inițiale. Dacă o funcție armonică este considerată drept referențial, toate armonicile cu aceeași frecvență și aceeași orientare a direcției de acțiune a componentei electrice a câmpului  $e_m$  se vor deosebi de aceasta prin diferențe de fază diferite a căror valoare variază în mod aleator, cu egală probabilitate, în domeniul  $(-\pi \div +\pi)$  rad.

2. Alt model prin care se poate reprezenta câmpul radiației optice este *modelul de radiație monocromatică* (aceeași culoare). Acesta reprezintă o realitate fizică și descrie radiația optică emisă de către un ansamblu de sisteme cuantice la tranziția

acestora dintr-o stare energetică dată pe una inferioară. Într-un punct al spațiului unde se determină elongația câmpului radiației optice, aceasta, la un moment dat, reprezintă superpoziția câmpurilor elementare (relația fig. ) emise de către sistemele cuantice ale ansamblului. Din această cauză, atât amplitudinea câmpului cât și faza acestuia trebuie să depindă de timp.

O undă de tip monocromatic poate fi dezvoltată sub forma unei sume de unde armonice, utilizând metoda introdusă de către Fourier.

O funcție dependentă în mod arbitrar de timp, de ex. Funcția  $e(\mathbf{R}, t)$ , poate fi considerată ca o superpoziție de diferite funcții armonice, caracterizate prin frecvențe, amplitudini și faze diferite, sub forma:

$$(2.3) \quad \tilde{e}(\mathbf{R}, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{E}(\omega) e^{i\omega t} d\omega,$$

unde mărimea  $\tilde{E}(\omega)$  se determină efectuând transformata Fourier inversă:

$$(2.3') \quad \tilde{E}(\mathbf{R}, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{e}(\mathbf{R}, t) e^{-i\omega t} dt.$$

Deoarece mărimea  $e(\mathbf{R}, t)$  este reală, atunci mărimea  $\tilde{E}(\omega)$  poate fi exprimată printr-o funcție simetrică față de variabila  $\omega$ , adică  $\tilde{E}(-\omega) = \tilde{E}^*(\omega)$ . În aceste condiții, dacă se folosesc aceste relații, integrala (2.3') se simplifică:

$$\int_{-\infty}^0 \tilde{E}(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \int_0^{\infty} \tilde{E}(-\omega) e^{-i\omega t} d\omega = \int_0^{\infty} \tilde{E}^*(\omega) e^{-i\omega t} d\omega,$$

adică funcția  $e(\mathbf{R}, t)$  reprezintă suma dintre funcția complexă și funcția conjugată-complex a acesteia.

Funcția de undă complexă poate fi definită ca fiind egală cu dublul primului termen:

$$(2.4) \quad \tilde{e}(\mathbf{R}, t) = 2 \int_0^{\infty} \tilde{E}(\omega) e^{i\omega t} d\omega,$$

iar partea reală va fi:

$$(2.5) \quad e(\mathbf{R}, t) = \operatorname{Re} \{ \tilde{e}(\mathbf{R}, t) \} = \frac{1}{2} \left[ \tilde{e}(\mathbf{R}, t) + \tilde{e}^*(\mathbf{R}, t) \right].$$

Funcția de undă complexă (semnalul analitic complex) se obține din funcția de undă parcurgând următoarele etape:

- se determină transformata Fourier a acestei funcții;
- se elimină "frecvențele negative" și se multiplică cu 2;
- se determină transformata Fourier inversă.

Deoarece fiecare componentă Fourier reprezintă o soluție a ecuației de undă, atunci și funcția de undă complexă  $e(\mathbf{R}, t)$  satisface această ecuație. În fig. 11 este

prezentată transformata Fourier a funcției de undă și a funcției de undă complexe în cazul radiației monocromatice.

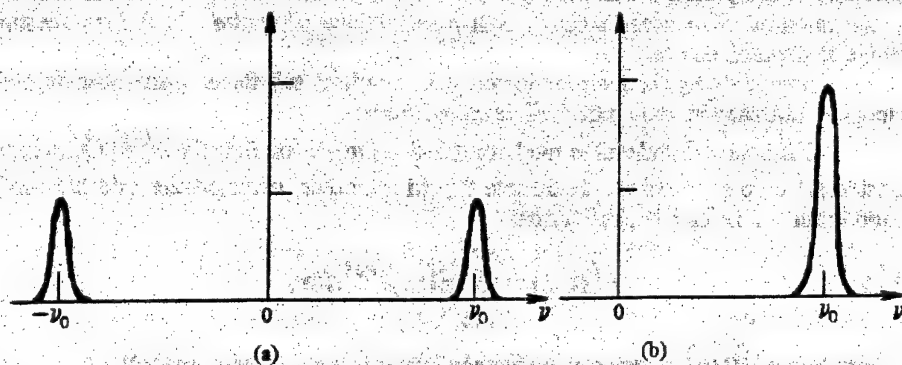


Fig. 11

Componentele Fourier ale unei unde monocromatice sunt dispuse într-un domeniu spectral caracterizat prin lățimea spectrală  $\Delta\nu$  centrată pe frecvența centrală  $\nu_0$ , care îndeplinește condiția  $\Delta\nu \ll \nu_0$ . Intensitatea energetică se exprimă prin intermediul funcției de undă conform relației:

$$(2.6) \quad I(\mathbf{R}, t) = 2 \langle e^2(\mathbf{R}, t) \rangle = 2 \langle \{ \tilde{e}(\mathbf{R}, t) + \tilde{e}^*(\mathbf{R}, t) \}^2 \rangle =$$

$$= \frac{\langle \tilde{e}^2(\mathbf{R}, t) \rangle}{2} + \frac{\langle \tilde{e}^{*2}(\mathbf{R}, t) \rangle}{2} + \langle \tilde{e}(\mathbf{R}, t) \tilde{e}^*(\mathbf{R}, t) \rangle$$

Dacă unda este monocromatică caracterizată prin frecvența centrală  $\nu_0$  și lățimea spectrală  $\Delta\nu \ll \nu_0$ , media în timp trebuie să fie considerată pe un interval de timp mult mai mare decât perioada optică  $1/\nu_0$ , dar mult mai mică decât  $1/\Delta\nu$ . Deoarece  $\tilde{e}(\mathbf{R}, t)$  este dat de relația (2.4), termenul în  $\tilde{e}^2(\mathbf{R}, t)$  are o componentă care oscilează la frecvența  $(2\nu_0)$ , iar componenta mărimii  $\tilde{e}^{*2}(\mathbf{R}, t)$  oscilează la frecvența  $(-2\nu_0)$ . Media în timp a acestor termeni este egală cu zero. Variația în timp a celui de al treilea termen se realizează la o frecvență egală cu diferența de frecvență  $\Delta\nu$ , care este de ordinul  $\Delta\nu \ll \nu_0$ . Deoarece acest termen este lent-variabil în timp, nu este afectat de operația de mediere în timp și, ca rezultat, se obține:

$$(2.7) \quad I(\mathbf{R}, t) = |\tilde{e}(\mathbf{R}, t)|^2.$$

Intensitatea energetică a unei monocromatice este dată de pătratul valorii modului funcției de undă complexă. Din această cauză este comod să se lucreze cu funcția de undă complexă.

Modulul mărimii  $\tilde{E}(\mathbf{R}, \omega)$  definit de relația (2.3'), reprezintă amplitudinea unei armonice caracterizată prin frecvența  $\omega$ . Funcția care descrie dependența de frecvență a amplitudinilor armonicilor reprezintă *funcția spectrală* (*conturul spectral*). Aceasta reprezintă înfășurătoarea (anvelopa) amplitudinilor funcțiilor de undă armonice constitutive ale semnalului. În unele cazuri se cunoaște expresia matematică a unor funcții spectrale care descriu radiația monocromatică. De ex. radiația monocromatică emisă de către un dipol electric (sau un ansamblu de dipoli) care se relaxează radiativ este descrisă de o funcție de tip Lorentz (I 7.3). Dacă se consideră și procesele de ciocniri dintre constituenții ansamblului, atunci conturul spectral este descris tot de o funcție de tip Lorentz, dar cu lățime spectrală modificată (vezi ). Dacă se consideră faptul că sursele elementare emițătoare ale ansamblului sunt în mișcare (lărgire Doppler), atunci funcția spectrală este de tip Gauss, sau atunci când se consideră atât procesul de ciocniri cât și deplasarea Doppler conturul spectral este de tip Voigt.

Din cele prezentate rezultă următoarele:

- intensitatea-componentei electrice a câmpului radiației optice poate fi exprimată printr-o funcție dependentă de timp, deci în *reprezentarea temporală*;
- folosind tehnica transformatei Fourier, aceeași mărime poate fi exprimată prin intermediul componentelor armonice, deci în *reprezentarea în frecvență*.

Cele două reprezentări sunt echivalente.

3. *Radiație cvazimonocromatică.* Prin acest model se descrie radiația cuprinsă într-un domeniu spectral suficient de larg ( $\Delta\nu \ll \nu_0$ ), unde  $\nu_0$  fixează aproximativ centrul domeniului spectral considerat. Drept ex. putem considera radiația dintr-un domeniu spectral filtrat cu ajutorul unui monocromator sau a unui filtru optic. Distribuția intensității energetice în domeniul spectral considerat este definită de caracteristicile dispozitivului de filtrare. Aceasta reprezintă înfășurătoarea intensității energetice a componentelor armonice ale semnalului.

*Funcții spectrale.* Deoarece folosind receptorii actuali de radiație optică nu se poate înregistra fenomenul de bătai, se poate accepta ideea independenței câmpurilor cu frecvențe diferite. Prin urmare densitatea totală de flux a câmpului *em* constituit din câmpuri armonice cu frecvențe diferite este egală cu suma densităților fiecărui câmp:

$$\langle e(t)^2 \rangle = \langle e_1(t)^2 \rangle + \langle e_2(t)^2 \rangle + \dots + \langle e_n(t)^2 \rangle + \dots$$

$$\Phi_{\text{total}} = \Phi_1(\nu_1) + \Phi_2(\nu_2) + \dots + \Phi_n(\nu_n) + \dots,$$

sau dacă câmpul prezintă o distribuție continuă după frecvență:

$$\Phi_{\text{total}} = \int_0^{\infty} \phi(\nu) d\nu,$$

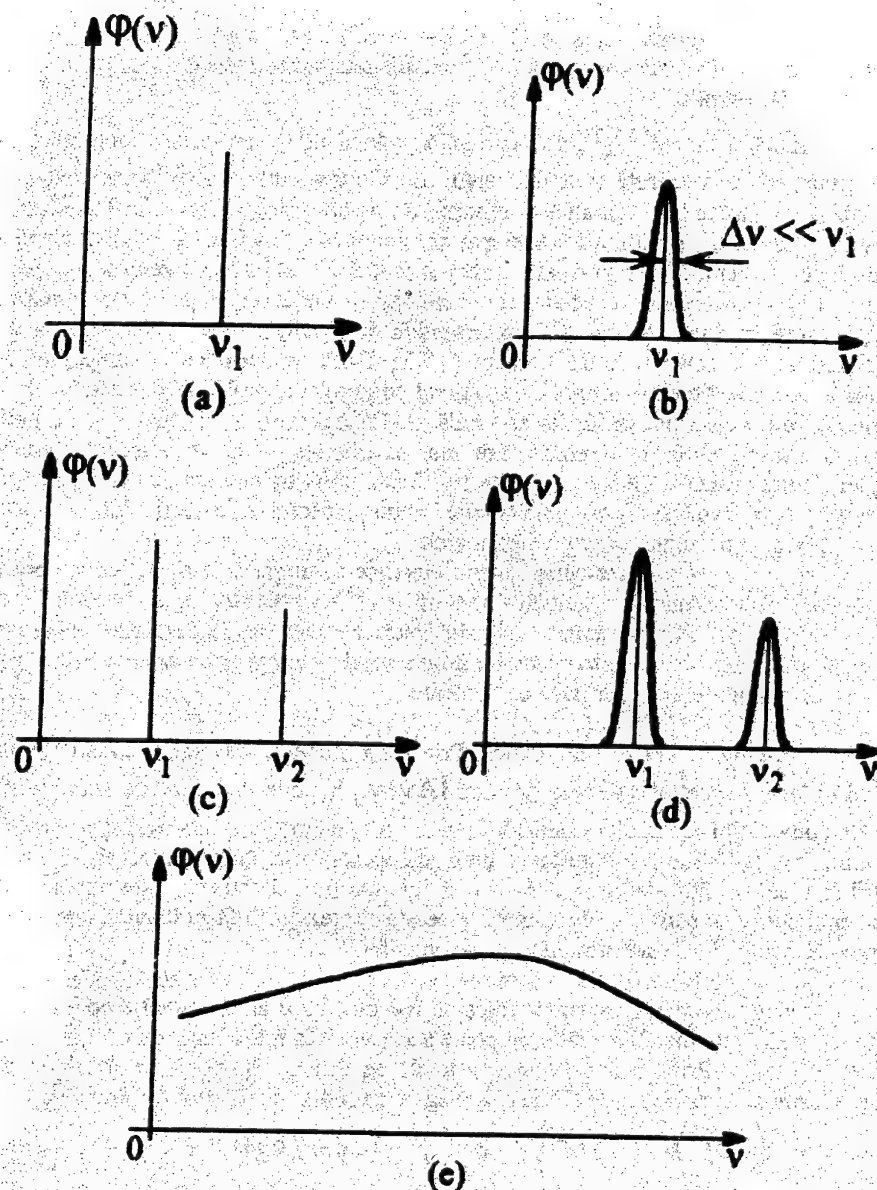


Fig. 12

unde:  $\Phi(v)dv$  reprezintă fluxul corespunzător intervalului de frecvențe  $v - \frac{dv}{2} \div v + \frac{dv}{2}$ , iar mărimea  $\Phi(v)$  descrie distribuția energiei în domeniul

spectral considerat. Deoarece este dificil să se determine valoarea absolută a mărimii  $\Phi(v)dv$ , se preferă o *mărime relativă*. Pentru a caracteriza distribuția energiei într-un domeniu spectral se introduce *funcția de distribuție spectrală (conturul spectral)*:

$$g(v) = \frac{\Phi(v)}{\Phi_{\text{total}}(v)},$$

care are proprietatea de a fi normalizată:

$$\int_0^{\infty} g(v)dv = 1.$$

În fig. 12 este prezentată funcția de distribuție spectrală caracteristică unor tipuri de câmpuri *em*: armonic (a, c), monocromatic (b, d) și cvazimonocromatic (e).

Funcția spectrală a câmpului optic ideal (câmpul armonic), este reprezentată de conturul funcționalei- $\delta$ :

$$g(v) = \delta(v - v_1), \text{ respectiv: } \int_0^{\infty} g(v)dv = \int_0^{\infty} \delta(v - v_1)dv = 1,$$

unde funcționala- $\delta$ , are proprietatea:

$$\delta(v - v_1) = 0, \text{ dacă: } v \neq v_1, \text{ respectiv } \delta(v - v_1) = 1, \text{ dacă: } v = v_1.$$

Dependența de frecvență a mărimii  $\Phi(v)dv$  se determină cu ajutorul spectrometrului cu prismă, cu rețea de difracție sau de tip Fabry-Perot. Aceeași mărime se poate determina și prin metodele *spectroscopiei interferențiale*, folosind distribuția vizibilității tabloului de interferență.

### 3. Coerența temporală și spațială a radiației optice

Fenomenul de interferență reprezintă compunerea, într-un punct dat al spațiului, a două sau mai multe câmpuri. Dacă acestea sunt dependente de timp atunci rezultatul compunerii depinde de timp. Rezultatul interferenței fasciculelor de radiație optică cu aceeași frecvență sau cu frecvențe diferite nu se poate înregistra în mod obișnuit, deoarece, pe de o parte, în domeniul frecvențelor optice nu există detectori de radiație cu rezoluție temporală corespunzătoare, iar pe de altă parte datorită structurii radiației optice apar variații în timp care necesită detectori cu o rezoluție temporală și mai bună. Din această cauză detectori de radiație optică realizează o mediere a rezultatului interferenței pe un interval de timp caracteristic detectorului.

#### 3.1 Interferența a două fascicule

de radiație optică cu frecvențe diferite.

În condiții experimentale obișnuite nu se poate înregistra rezultatul valorii instantanee a interferenței fasciculelor de radiație optică cu frecvențe diferite.



1) Să analizăm cazul cel mai simplu al câmpului *em* constituit din două semnale armonice:

$$e_1(t) = E_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) \text{ și } e_2(t) = E_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2),$$

unde mărimile  $E_1$  și  $E_2$ , respectiv  $\phi_1$  și  $\phi_2$  sunt independente de timp. Intensitatea câmpului electric rezultat este dată de relația:

$$\begin{aligned} e(t) &= e_1(t) + e_2(t) = E_0 [\cos(\omega_1 t + \phi_1) + \cos(\omega_2 t + \phi_2)] = \\ (3.1.1) \quad &= 2E_0 \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t + \frac{\phi_1 - \phi_2}{2}\right) \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t + \frac{\phi_1 + \phi_2}{2}\right) = \\ &= E \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t + \frac{\phi_1 + \phi_2}{2}\right) \end{aligned}$$

unde s-a considerat:  $E_1 = E_2 = E_0$ . Deoarece valoarea mărimilor  $\phi_1$  și  $\phi_2$  este independentă de timp, elongația rezultantă variază periodic cu frecvența  $\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right)$ ,

iar amplitudinea este modulată cu frecvența  $\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}$ , manifestându-se fenomenul de *bătăi*.

După cum s-a prezentat în prg. I 6, atunci când se efectuează măsurători asupra câmpului radiației optice, receptorul de radiație realizează o mediere în timp asupra pătratului elongației câmpului. Densitatea de flux într-un punct al câmpului de interferență, reprezintă valoarea medie a vectorului Poynting, calculată pe intervalul de

timp  $\left(t_0 - \frac{T}{2} \div t_0 + \frac{T}{2}\right)$ , unde  $T$  reprezintă intervalul de măsură, centrat pe

momentul  $t_0$ :

(3.1.2)

$$\varphi(t_0) = \frac{1}{c\mu_0} \langle [e_1(t) + e_2(t)]^2 \rangle = \frac{1}{c\mu_0} \left[ \langle e_1(t)^2 \rangle + \langle e_2(t)^2 \rangle + 2\langle e_1(t)e_2(t) \rangle \right]$$

unde:

$$(3.1.2') \quad \langle e_1(t_0)^2 \rangle = \frac{E_1^2}{2} \int_{t_0 - \frac{T}{2}}^{t_0 + \frac{T}{2}} \cos^2(\omega_1 t + \phi_1) dt =$$

$$\begin{aligned} &= \frac{E_1^2}{2} \left\{ \frac{\sin \theta \cos \theta}{2} \Big|_{t_0 - \frac{T}{2}}^{t_0 + \frac{T}{2}} + \frac{1}{2} \int_{t_0 - \frac{T}{2}}^{t_0 + \frac{T}{2}} \cos^2 \theta dt \right\} = \\ &= \frac{E_1^2}{2T} \left( t_0 + \frac{T}{2} - t_0 + \frac{T}{2} \right) = \frac{E_1^2}{2} \end{aligned}$$

(3.1.2'')

$$\langle e_1(t)e_2(t) \rangle =$$

$$= \frac{E_1 E_2}{2} \left\{ \langle \cos[(\omega_1 - \omega_2)t + \phi_1 - \phi_2] \rangle + \langle \cos[(\omega_1 + \omega_2)t + \phi_1 + \phi_2] \rangle \right\}$$

Fazele celor două câmpuri sunt independente de timp, deci diferența de fază este constantă în timp. Din relația (3.1.2'') rezultă că fenomenul de *bătăi* poate fi observat numai dacă cele două frecvențe sunt foarte apropiate, astfel încât  $(\omega_1 - \omega_2)T \ll 1$ . Deoarece în domeniul optic mărimea  $(\omega_1 + \omega_2)$  are o valoare foarte mare, în intervalul timpului de măsură  $T$ , funcția  $\cos(\omega_1 + \omega_2)t$  prezintă multe oscilații, iar valoarea medie a termenului al doilea al relației (3.1.2'') este egală cu zero. Relativ la primul termen, dacă există relația  $(\omega_1 - \omega_2)T \gg 1$ , în același interval de măsură, funcția *cosinus* prezintă un număr mare de oscilații, deci valoarea medie de asemenea va fi egală cu zero.

2) Dacă cele două semnale reprezintă *fascicule de radiație optică monocromatică* atunci  $E_1(t)$  și  $E_2(t)$ , respectiv  $\phi_1(t)$  și  $\phi_2(t)$  sunt mărimi *lent-variabile în timp*, iar densitatea de flux rezultată este:

(3.1.3)

$$\varphi(t_0) =$$

$$= \frac{1}{c\mu_0} \left\{ \frac{\langle E_1(t)^2 \rangle}{2} + \frac{\langle E_2(t)^2 \rangle}{2} + \langle E_1(t)E_2(t) \rangle \cos[\cos(\omega_1 - \omega_2)t + \phi_1(t) - \phi_2(t)] \right\}$$

Dacă  $(\omega_1 - \omega_2)T \gg 1$ , nici în acest caz nu se poate observa fenomenul de *bătăi* deoarece valoarea medie a ultimului termen este egală cu zero. În plus, în acest caz diferența de fază depinde de timp în mod aleator.

Prin urmare pentru a observa fenomenul de *bătăi* în cazul radiației optice, este necesar să fie îndeplinite condițiile:

- timpul de mediere al receptorului să fie mic față de intervalul

$$\text{bătăilor: } T \ll t_b = \frac{1}{2(\nu_1 - \nu_2)};$$

- diferența de fază  $\Delta\phi = \phi_1(t) - \phi_2(t)$  trebuie să prezinte o valoare constantă ( $\Delta\phi = \phi_1(t) - \phi_2(t) \cong ct$ ) cel puțin pe intervalul câtorva bătăi.

Dacă aceste condiții nu sunt îndeplinite, nu se poate observa fenomenul de bătăi, deoarece argumentul funcției *cosinus* se va modifica în timp, ceea ce face ca valoarea medie a relației (3.1 2") să tindă la zero. Această condiție se poate realiza numai dacă *timpul de coerență mutuală* (timpul în care valoarea variației de fază prezintă o fluctuație mai mică de  $1\text{rad}$ ) este mare față de perioada bătăilor.

Spre deosebire de fluctuațiile mărimilor  $\phi_1(t)$  și  $\phi_2(t)$  care "distrug" bătăile, fluctuațiile mărimilor  $E_1(t)$  și  $E_2(t)$  nu le "distrug", ci numai le modulează amplitudinea.

Cele două condiții ar putea fi realizate utilizând de ex. un interferometru Michelson, în care o oglindă este deplasată cu viteză constantă. Frecvența fascicului reflectat sub incidență normală de către oglinda care se deplasează, față de frecvența fascicului reflectat de oglinda fixă, este modificată prin efect Doppler:

$$\Delta\nu = \nu - \nu' = \nu - \left( \nu \pm \frac{2\nu v}{c} \right) = \frac{2\nu}{c} v$$

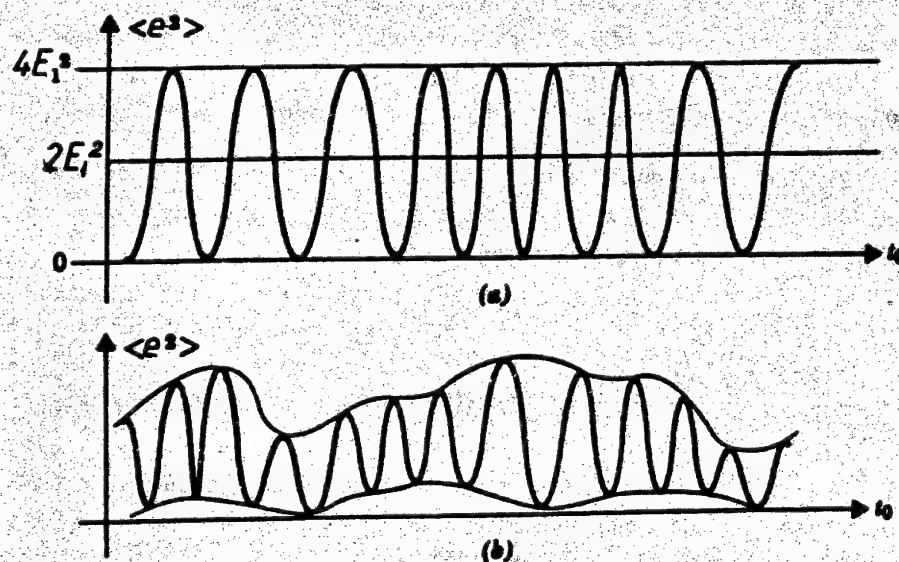


Fig. 13 a,b

(factorul 2 apare deoarece fascicului reflectat parcurge de două ori distanța pe care se deplasează oglinda). În acest mod se obține un fascicul a cărui frecvență este modificată funcție de viteza oglinzii și care, prin interferență cu primul fascicul, conduce la

fenomenul de bătăi. În acest experiment diferența de fază dintre cele două fascicule se menține constantă atâta timp cât timpurile de coerență sunt mari față de intervalul dintre bătăi.

În fig. 13 a este prezentată variația în timp a fluxului de radiație optică corespunzătoare fenomenului de bătăi. S-a considerat că mărimile  $E_1 \cong E_2$  sunt constante în timp, iar medierea s-a efectuat în jurul unor momente  $t_0$ , intervalul de mediere fiind mic față de intervalul dintre bătăi. Fenomenul se observă numai în intervalul de timp în care diferențe de fază se menține constantă. Dacă mărimile  $E_1(t)$  și  $E_2(t)$  prezintă fluctuații în timp la aceeași scară ca și mărimile  $\phi_1(t)$  și  $\phi_2(t)$ , acestea vor modula amplitudinea bătăilor (fig. 13 b).

Fenomenul de bătăi a fost înregistrat de către A.T. Forrester, R.A. Cudmundsen, P.C. Johnson [Phys.Rev., 99, 1691 (1955)] folosind radiația optică emisă de către o sursă termică (lampă cu vapori Hg la presiune joasă). Drept sursă de radiație au fost folosite componentele dubletului Zeeman al liniei  $546,1\text{nm}$ , celelalte linii fiind filtrate. Diferența de frecvență  $\Delta\nu \cong 10^{10}\text{Hz}$  este proporțională cu inducția câmpului magnetic. Pentru a satisface condiția de coerență  $\left( \tau > \frac{1}{\Delta\nu} \right)$ , valoarea timpurilor de corelare a fost egală cu  $\tau_1 \cong \tau_2 = 10^{-9}\text{s}$ . Folosind o tehnică specială au fost înregistrate bătăi cu frecvența  $10^{10}\text{Hz}$ , raportul semnal/zgomot fiind aprox. egal cu  $10^{-4}$ .

### 3.2 Spectroscopie interferențială.

Un spectrometru interferențial reprezintă un interferometru Michelson modificat pentru a utiliza fascicule colimate (fig. 14). Imaginea sursei S se formează în planul focal al lentilei  $L_2$ , unde este dispus receptorul de radiație optică. Deoarece unghiul de incidență pe oglinzi al radiației este egal cu zero, variația fazei determinată de deplasare oglinzii  $O_2$  față de imaginea ei  $O'_1$  este:

$$\Delta = \frac{2\pi}{\lambda_1} 2d = 2\pi\nu_1\tau = \omega_1\tau,$$

unde:  $\tau = \frac{2d}{c}$  reprezintă *timpul de retardare* al unui fascicul față de celălalt

determinat de deplasarea  $d$  a oglinzii.

Să analizăm aspectul tabloului de interferență pentru semnale la intrare spectrometrului a căror structură spectrală este cunoscută.

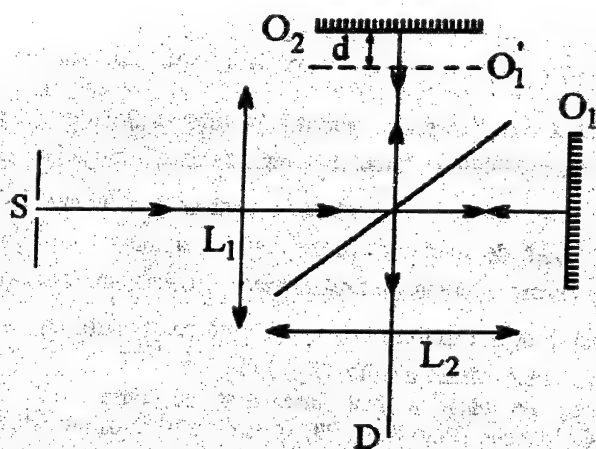


Fig. 14

1. Dacă semnalul este reprezentat de un *câmp armonic*, variația densității de flux la nivelul detectorului, determinată de deplasarea oglinzii, este:

$$(3.2.1) \quad \varphi_d(\tau) = \frac{1}{c\mu_0} \langle (e_1 + e_2)^2 \rangle =$$

$$= \varphi_1 + \varphi_2 + 2\sqrt{\varphi_1\varphi_2} \cos \frac{2d\omega_1}{c} = \varphi_0 (1 + x \cos \omega_1 \tau)$$

unde:  $x = \frac{2\sqrt{\varphi_1\varphi_2}}{\varphi_1 + \varphi_2}$ , iar:  $\varphi_0 = \varphi_1 + \varphi_2$  reprezintă densitatea de flux la intrarea interferometrului. Dacă divizorul de amplitudine este perfect ( $\varphi_1 = \varphi_2$ ), deci ( $x = 1$ ), densitatea de flux la nivelul detectorului este constituită dintr-un termen constant și unul oscilant:

$$\varphi_d(\tau) = \varphi_0 + \varphi_0 \cos \omega_1 \tau = \varphi_0 + \varphi_{\text{oscilant}}$$

Termenul oscilant poate fi normat sub forma:

$$(3.2.2) \quad \gamma(\tau) = \frac{\varphi_{\text{osc}}}{\varphi_0} = \cos \omega_1 \tau,$$

limitele variației densității de flux fiind egale cu:  $\varphi_M = 2\varphi_0$ , respectiv:  $\varphi_m = 0$  (media în timp a termenului oscilant este egală cu zero). Relația (3.2.2) evidențiază faptul că funcția  $\gamma(\tau)$  conține informații privind structura spectrală a semnalului incident.

Pentru a caracteriza variația densității de flux la nivelul detectorului în diferite puncte ale tabloului de interferență, prin definiție se introduce mărimea fizică cunoscută sub denumirea de *vizibilitate a tabloului de interferență*, sub forma:

$$(3.2.3) \quad V = \frac{\varphi_M - \varphi_m}{\varphi_M + \varphi_m}$$

Această mărime se definește într-un punct al tabloului, iar  $\varphi_M$  reprezintă valoarea densității maxime de flux în vecinătatea aceluiași punct, respectiv  $\varphi_m$  valoarea densității minime în vecinătatea aceluiași punct.

În cazul câmpului armonic (pentru  $x = 1$ ), vizibilitatea are valoarea  $V = 1$ .

2. Semnalul la intrarea interferometrului este constituit din două câmpuri armonice:

$$(3.2.4) \quad \varphi_0(\nu) = \varphi_{01}(\nu_1) + \varphi_{02}(\nu_2)$$

În acest caz:  $g(\nu_1) = \frac{\varphi_{01}}{\varphi_0}$ , respectiv:  $g(\nu_2) = \frac{\varphi_{02}}{\varphi_0}$ , deci:  $\varphi_{01} = g(\nu_1)\varphi_0$ ,

respectiv:  $\varphi_{02} = g(\nu_2)\varphi_0$ , unde  $g(\nu)$  reprezintă funcția de distribuție spectrală.

Câmpurile considerate fiind armonice, funcția de distribuție spectrală totală are forma:

$$g(\nu) = g(\nu_1)\delta(\nu - \nu_1) + g(\nu_2)\delta(\nu - \nu_2)$$

Deoarece această funcție este normată, există relația:

$$g(\nu_2) = 1 - g(\nu_1)$$

Cele două câmpuri fiind independente, densitatea de flux la nivelul detectorului este constituită din suma densităților de flux:

$$\varphi_d(\tau) = \varphi_{d1}(\tau) + \varphi_{d2}(\tau) = \varphi_{01}(1 + \cos \omega_1 \tau) + \varphi_{02}(1 + \cos \omega_2 \tau) =$$

$$= \varphi_0 + \varphi_{\text{osc}} = \varphi_0 [1 + \gamma(\tau)]$$

Termenul oscilant normat este de forma:

(3.2.5)

$$\gamma(\tau) = \frac{\varphi_{01}}{\varphi_{01} + \varphi_{02}} \cos \omega_1 \tau + \frac{\varphi_{02}}{\varphi_{01} + \varphi_{02}} \cos \omega_2 \tau =$$

$$= g_1(\nu_1) \cos \omega_1 \tau + g_2(\nu_2) \cos \omega_2 \tau = g_1(\nu_1)\gamma_1(\tau) + g_2(\nu_2)\gamma_2(\tau)$$

Din relația (3.2.5) rezultă că funcția  $\gamma(\tau)$  conține informații relativ la funcția de distribuție spectrală a semnalului incident.

În fig. 15 este prezentat rezultatul fenomenului de interferență. Fig. 15 a se referă la cazul prezenței la intrarea interferometrului a unui semnal armonic de tipul celui prezentat în fig. 12 a. În cazul fig. 15 b, la intrarea interferometrului sunt prezente două câmpuri armonice ( $\nu_1$  și  $\nu_2$  - fig. 12 c) a căror intensități spectrale sunt egale,



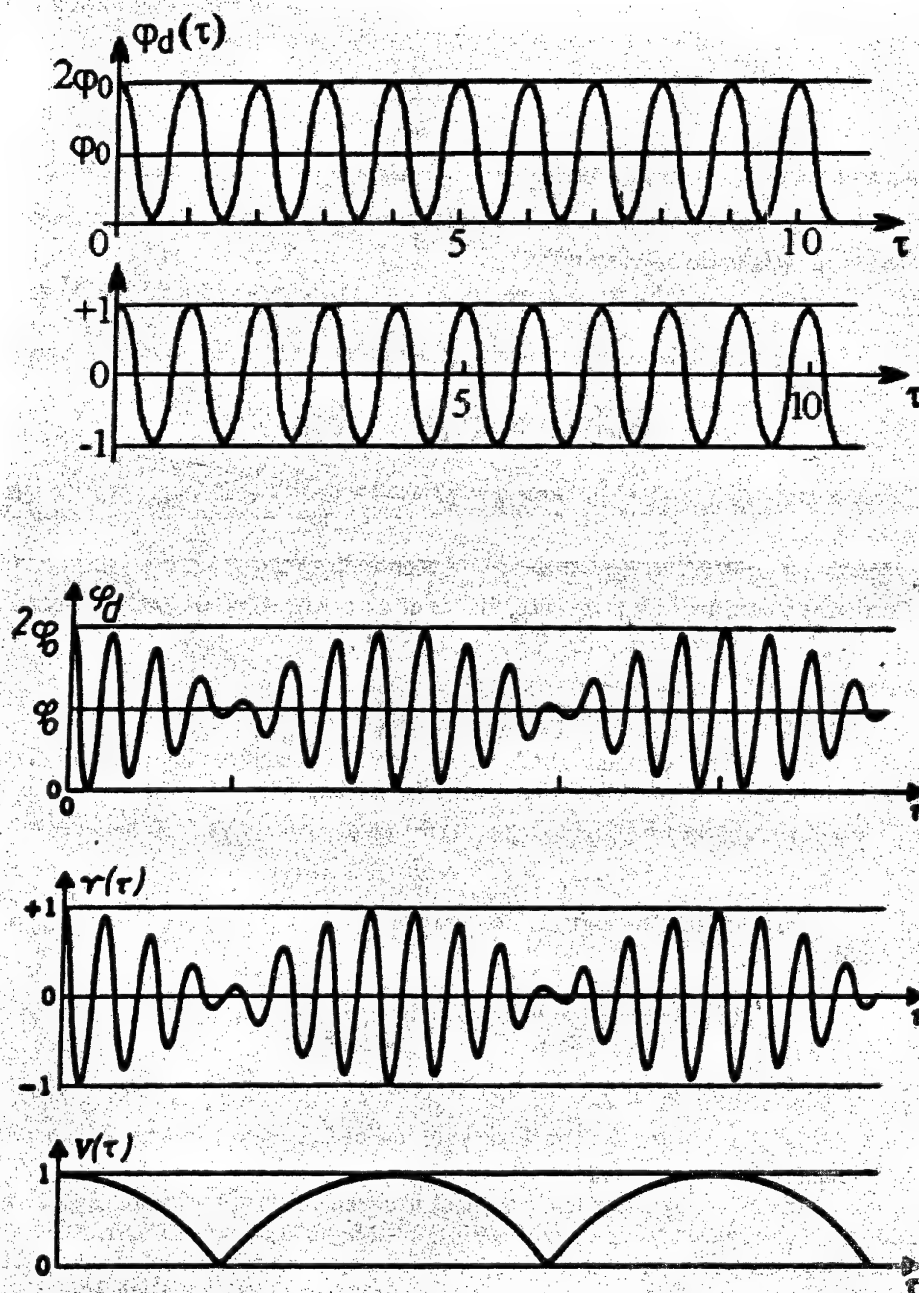


Fig. 15 a,b

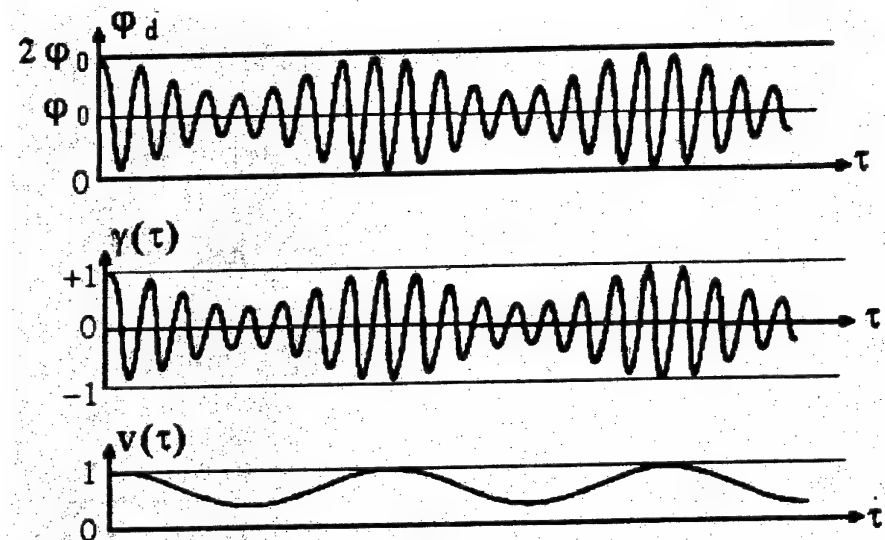


Fig. 15 c

iar în cazul fig. 15 c cele două intensități spectrale sunt diferite, ceea ce se reflectă în vizibilitatea tabloului de interferență.

Pentru a descrie vizibilitatea tabloului de interferență, funcția  $\gamma(\tau)$  se poate exprima sub o altă formă, introducând notațiile:

$$\omega_0 = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \text{ și } \Delta\omega = \omega_1 - \omega_2,$$

de unde:

$$\omega_1 = \omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}, \text{ respectiv: } \omega_2 = \omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}.$$

Folosind aceste notații, relația (3.2.5) devine:

$$\begin{aligned} \gamma(\tau) &= g_1(v_1)\cos\omega_1\tau + [1 - g_1(v_1)]\cos\omega_2\tau = \\ &= g_1(v_1)\cos\left(\omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}\right)\tau + [1 - g_1(v_1)]\cos\left(\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}\right)\tau = \\ (3.2.5') \quad &= \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}\tau\right)\cos(\omega_0\tau) - (2g_1 - 1)\sin\left(\frac{\Delta\omega}{2}\tau\right)\sin(\omega_0\tau) = \\ &= C(\tau)\cos(\omega_0\tau) + S(\tau)\sin(\omega_0\tau) = U(\tau)\cos[\omega_0\tau + \phi(\tau)] \end{aligned}$$

unde s-a notat:

$$C(\tau) = \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}\tau\right) = U(\tau)\cos\phi(\tau),$$

$$-S(\tau) = (2g_1 - 1)\sin\left(\frac{\Delta\omega}{2}\tau\right) = U(\tau)\sin\phi(\tau), \text{ respectiv:}$$

$$U(\tau) = \sqrt{C^2(\tau) + S^2(\tau)} \text{ și } \tan\phi(\tau) = (2g_1 - 1)\tan\left(\frac{\Delta\omega}{2}\tau\right).$$

Expresia densității de flux devine:

$$(3.2.6) \quad \varphi_d(\tau) = \varphi_0[1 + \gamma(\tau)] = \varphi_0\{1 + U(\tau)\cos[\omega_0\tau + \phi(\tau)]\},$$

având valorile extreme:

$$\varphi_{dM} = \varphi_0[1 + U(\tau)] \text{ și } \varphi_{dm} = \varphi_0[1 - U(\tau)].$$

Vizibilitatea tabloului de interferență este descrisă de relația:

$$(3.2.7) \quad V(\tau) = U(\tau) = \sqrt{\cos^2\left(\frac{\Delta\omega}{2}\tau\right) + (4g_1^2 - 4g_1 + 1)\sin^2\left(\frac{\Delta\omega}{2}\tau\right)} = \\ = \sqrt{1 + 4g_1(1 - g_1)\sin^2\left(\frac{\Delta\omega}{2}\tau\right)}$$

care variază între valorile extreme:

$$V_M = 1 \text{ și } V_m = V(\tau) = \sqrt{1 + 4g_1^2 - 4g_1} = |1 - 2g_1|.$$

Dacă  $\Delta\omega \ll \omega_0$ , deplasarea oglinzii (variația mărimii  $\tau$ ) determină o variație lentă a densității de flux.

3. La intrarea spectrometrului interferențial este incident un câmp de radiație optică de tip *monocromatic*. Funcția de distribuție spectrală a radiației monocromatice este centrată pe o frecvență dată  $\nu_0$  și tinde la zero cu cât  $\nu$  se îndepărtează de  $\nu_0$ . Se definește lățimea domeniului spectral  $\Delta\nu = \nu_2 - \nu_1$ , drept domeniul pentru care valoarea lui  $g(\nu)$  prezintă o contribuție importantă la valoarea integrală a lui  $g$ . Prin

convenție mărimile  $\nu_2 = \nu_0 + \frac{\Delta\nu}{2}$  și  $\nu_1 = \nu_0 - \frac{\Delta\nu}{2}$  sunt frecvențele pentru care

este îndeplinită condiția:  $g(\nu_1) = g(\nu_2) = \frac{g(\nu_0)}{2}$ . Radiația optică se consideră

monocromatică dacă este îndeplinită condiția  $\Delta\nu \ll \nu_0$ .

Dacă se introduce variabila  $\mu = \nu - \nu_0$  (se modifică valoarea de referință), atunci:  $g(\nu) = D(\nu - \nu_0) = D(\mu)$ , unde  $D(\mu)$  prezintă valori neglijabile

exceptând domeniul:  $-\frac{\Delta\nu}{2} < \mu < \frac{\Delta\nu}{2}$ .

Deoarece  $g(\nu)$  este o mărime normată se obține:

$$\int_0^\infty g(\nu) d\nu = \int_{-\nu_0}^\infty D(\mu) d\mu \cong \int_{-\infty}^\infty D(\mu) d\mu = 1,$$

unde:  $\mu = \nu - \nu_0$ ,  $d\mu = d\nu$  și pentru  $\nu = 0 \rightarrow \mu = -\nu_0$ .

Expresia funcției de corelare devine:

$$(3.2.8) \quad \gamma(\tau) = \int_0^\infty g(\nu) \cos 2\pi\nu\tau d\nu = \int_{-\nu_0}^\infty D(\mu) \cos 2\pi(\nu_0 + \mu)\tau d\mu \cong \\ \cong \int_{-\infty}^\infty D(\mu) \cos 2\pi(\nu_0 + \mu)\tau d\mu =$$

$$= \cos\omega_0\tau \int_{-\infty}^\infty D(\mu) \cos 2\pi\mu\tau d\mu - \sin\omega_0\tau \int_{-\infty}^\infty D(\mu) \sin 2\pi\mu\tau d\mu = \\ = C(\tau) \cos\omega_0\tau + S(\tau) \sin\omega_0\tau = U(\tau) \cos[\omega_0\tau + \phi(\tau)]$$

$$\text{unde: } C(\tau) = \int_{-\infty}^\infty D(\mu) \cos 2\pi\mu\tau d\mu = U(\tau) \cos\phi(\tau),$$

$$S(\tau) = \int_{-\infty}^\infty D(\mu) \sin 2\pi\mu\tau d\mu = U(\tau) \sin\phi(\tau),$$

$$\text{iar: } U(\tau) = \sqrt{C^2(\tau) + S^2(\tau)}, \text{ respectiv: } \tan\phi(\tau) = -\frac{S(\tau)}{C(\tau)}.$$

Observații:

- Mărimile  $C(\tau)$ ,  $S(\tau)$ , respectiv  $U(\tau)$ ,  $\phi(\tau)$  sunt funcții lent-variabile față de variația funcției  $\cos\omega_0\tau$ ;

- Mărimile  $C(\tau)$  și  $S(\tau)$ , pentru  $\tau = 0$ , îndeplinesc condițiile:

$$C(0) = 1 \text{ și } S(0) = 0;$$

- Mărimea  $U(\tau)$  îndeplinește condiția:  $0 \leq U(\tau) \leq 1$ ;

- Dacă funcția de distribuție spectrală  $g(\nu)$  este simetrică față de  $\nu_0$ , atunci mărimea  $D(\mu)$  este o funcție pară  $D(\mu) = D(-\mu)$ , însă funcția  $\cos 2\pi\mu\tau$  fiind impară, produsul celor două funcții va fi impar, prin urmare  $S(\tau) = 0$ .

Dacă radiația monocromatică este caracterizată printr-o funcție de distribuție spectrală  $g(\nu)$  simetrică, termenul oscilant normal devine:

$$\gamma(\tau) = C(\tau) \cos \omega_0 \tau.$$

Densitatea spectrală de flux variază între limitele:

$$\Phi_M = \Phi_0 [1 + U(\tau)] \text{ și } \Phi_m = \Phi_0 [1 - U(\tau)],$$

iar expresia vizibilității devine:  $V(\tau) = U(\tau)$ . În acest caz se obține:  $V(\tau) = C(\tau)$ .

*Exemplu.* La intrarea spectrometrului interferențial este incident un câmp de radiație monocromatică caracterizată printr-o funcție de distribuție spectrală de tip Gauss (fig. 16 b), descrisă de expresia:

$$(3.2.9) \quad g(\nu) = D(\mu = \nu - \nu_0) = \sqrt{\pi} \tau_D e^{-\pi^2 (\nu - \nu_0)^2 \tau_D^2},$$

caracterizată prin valoarea maximă:  $g(\nu_0) = \sqrt{\pi} \tau_D$  și prin lățimea spectrală, definită prin valorile frecvenței pentru care valoarea  $g(\nu)$  este de  $e$  ori mai mică față

de valoarea maximă:  $g(\nu_1) = \frac{g(\nu_0)}{e}$ .

$$\text{Deci: } g(\nu) = \sqrt{\pi} \tau_D \exp[-\pi^2 (\nu_1 - \nu_0) \tau_D^2] = \frac{\sqrt{\pi} \tau_D}{e},$$

$$\text{de unde: } \Delta \nu' = \nu_1 - \nu_0 = \frac{1}{\pi \tau_D}, \text{ iar: } \Delta \nu = 2 \Delta \nu' = \frac{2}{\pi \tau_D}.$$

Conturul funcției spectrale (3.2.9) este normal:

$$\sqrt{\pi} \tau_D \int_0^\infty \exp[-\pi^2 (\nu_1 - \nu_0) \tau_D^2] d\nu = \sqrt{\pi} \tau_D \frac{1}{\pi \tau_D} \int_{-\pi \nu_0 \tau_D}^\infty e^{-x^2} dx = 1,$$

$$\text{unde: } x = \pi \tau_D (\nu - \nu_0), \quad d\nu = \frac{dx}{\pi \tau_D}, \text{ la } \nu = 0 \text{ corespunde: } x = -\pi \tau_D \nu_0,$$

$$\text{iar: } \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

Deoarece funcția de distribuție spectrală este simetrică, termenul oscilant normal este de forma:

$$\gamma(\tau) = C(\tau) \cos \omega_0 \tau,$$

unde:  
(3.2.10)

$$\begin{aligned} C(\tau) &= \operatorname{Re} \left\{ \int_{-\infty}^\infty \sqrt{\pi} \tau_D e^{-\pi^2 \mu^2 \tau_D^2} e^{i 2 \pi \mu \tau} d\mu \right\} = \\ &= \sqrt{\pi} \tau_D \operatorname{Re} \left\{ \int_{-\infty}^\infty \exp \left[ -\pi^2 \tau_D^2 \left( \mu^2 - \frac{i 2 \pi \mu \tau}{\pi \tau_D^2} \right) \right] d\mu \right\} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \operatorname{Re} \left\{ e^{-\left( \frac{\tau}{\tau_D} \right)^2} \int_{-\infty - \frac{i \tau}{\tau_D^2}}^{\infty + \frac{i \tau}{\tau_D^2}} e^{-u^2} du \right\} = e^{-\left( \frac{\tau}{\tau_D} \right)^2} \end{aligned}$$

$$\text{unde s-a notat: } \mu^2 - \frac{i 2 \pi \mu \tau}{\pi \tau_D^2} = \left( \mu - \frac{i \tau}{\pi \tau_D^2} \right)^2 + \left( \frac{\tau}{\pi \tau_D^2} \right)^2,$$

$$u = \left( \mu - \frac{i \tau}{\pi \tau_D^2} \right) \pi \tau_D, \text{ deci: } du = \pi \tau_D d\mu,$$

$$\text{respectiv: } \mu \rightarrow -\infty, u \rightarrow -\infty - \frac{i \tau}{\tau_D}; \mu \rightarrow +\infty, u \rightarrow +\infty - \frac{i \tau}{\tau_D}.$$

$$\text{Deci: } \gamma(\tau) = e^{-\left( \frac{\tau}{\tau_D} \right)^2} \cos \omega_0 \tau.$$

În fig. 16 a este prezentată dependența termenului oscilant de timpul de

retardare. Înălțimea  $C(\tau) = e^{-\left( \frac{\tau}{\tau_D} \right)^2}$  este o funcție lent-variabilă față de funcția  $\cos \omega_0 \tau$ , deoarece  $\tau_D \gg \frac{1}{\nu_0}$ . Dacă interferometrul Michelson este iluminat

cu radiația unei surse care emite radiație caracterizată prin funcția de distribuție (3.2.9),



atunci există un interval finit al timpului de retardare  $\tau = \frac{2d}{c}$  pentru care se poate observa fenomenul de interferență. Dacă timpul de retardare  $\tau \ll \tau_D$ , atunci se poate aproxima  $\exp\left[-\left(\frac{\tau}{\tau_D}\right)^2\right] \cong 1$ , iar termenul oscilant devine:  $\gamma(\tau) \cong \cos \omega_0 \tau$ , la fel ca în cazul radiației armonice.

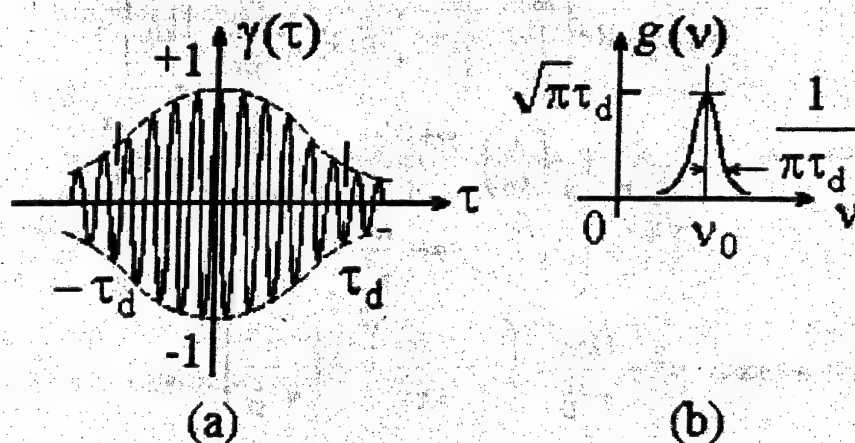


Fig. 16 a,b

Pentru a înregistra efectul lărimii spectrale este necesar să se considere valori ale timpului de retardare comparabile cu valoarea  $\tau_D$ , pentru care valoarea anvelopei  $C(\tau)$  se reduce de  $e$  ori. Deoarece  $\Delta v = \frac{2}{\pi \tau_D}$ , există relația  $\Delta v \tau_D \cong 1$ , deci mărimea  $\tau_D$  poate fi interpretată drept timp de coerență.

4. În cazul general densitatea de flux spectrală este descrisă de o funcție continuă  $\varphi(v)$ , iar mărimea  $\varphi(v)dv$  va reprezenta densitatea spectrală de flux corespunzătoare domeniului de frecvențe  $v \div v + dv$ . Densitatea de flux la nivelul detectorului va fi ( $x = 1$ ).

$$(3.2 11) \quad \varphi_d(\tau) = \int_0^{\infty} \varphi(v) [1 + \cos \omega \tau] dv =$$

$$= \int_0^{\infty} \varphi(v) dv + \int_0^{\infty} \varphi(v) \cos \omega \tau dv = \varphi_0 [1 + \gamma(\tau)]$$

unde:

$$(3.2 12) \quad \gamma(\tau) = \int_0^{\infty} g(v) \cos \omega \tau dv,$$

reprezintă termenul oscilant normalizat, iar  $g(v) = \frac{\varphi(v)}{\varphi_0}$  - funcția normalizată a distribuției spectrale.

Relația (3.2 12) exprimă mărimea  $\gamma(\tau)$  ca o transformată Fourier a funcției  $g(v)$ . Înregistrând termenul oscilant normalizat se poate obține funcția de distribuție spectrală efectuând transformata Fourier inversă. Presupunând cunoscută funcția  $\gamma(\tau)$  pentru toate valorile pozitive ale variabilei  $\tau$ , aceasta se înmulțește cu  $\cos 2\pi \mu \tau$  și se integrează în limitele  $0 \div \infty$ .

(3.2 13)

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \gamma(\tau) \cos 2\pi \mu \tau d\tau &= \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T \left[ \int_0^{\infty} g(v) \cos \omega \tau dv \right] \cos 2\pi \mu \tau d\tau = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} g(v) \left[ \int_0^T \cos \omega \tau \cos 2\pi \mu \tau d\tau \right] dv = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} g(v) \left[ \int_0^T \frac{1}{2} \cos 2\pi(v + \mu)\tau d\tau + \int_0^T \frac{1}{2} \cos 2\pi(v - \mu)\tau d\tau \right] dv \end{aligned}$$

unde:  $g(\mu) = 4 \int_0^{\infty} \gamma(\tau) \cos 2\pi \mu \tau d\tau$  reprezintă transformata Fourier inversă.

Proprietățile funcției  $\gamma(\tau)$ :

1 - Din relația (3.2 12) rezultă că pentru  $\tau = 0$ ,  $\gamma(0) = 1$ . Deoarece  $g(v)$  este o funcție nenegativă, pentru  $\tau > 0$  se obține:  $|\gamma(\tau)| < 1$ .

2 - Funcția de distribuție spectrală  $g(v)$  reprezintă suprapunerea unor funcții de distribuție individuale normale  $g_j(v)$ :

$$g(\nu) = \sum_j C_j g_j(\nu),$$

unde:  $\sum_j C_j = 1$ . Termenul oscilant normal reprezintă suma termenilor oscilanți normalizați corespunzători funcțiilor individuale  $g_j(\nu)$ .

$$\gamma(\tau) = \sum_j C_j \gamma_j(\tau) \text{ (vezi cazul a două câmpuri armonice).}$$

### 3.3 Funcția de autocorelare.

Micșorarea amplitudinii termenului oscilant (3.2 12) al factorului  $\gamma(\tau)$  este determinată de contribuția la tabloul de interferență a undelor armonice cu frecvențe diferite. Dispariția figurii de interferență se manifestă atunci când timpul de retardare ( $\tau$ ) este comparabil cu inversul lății spectrale ( $\Delta\nu$ ) a funcției de distribuție a

frecvențelor  $\left(\Delta\nu \cong \frac{1}{\tau}\right)$ . Lipsa contrastului figurii de interferență reprezintă o proprietate generală a surselor reale de radiație optică și apare atunci când poziția valorii minime de interferență corespunzătoare unei frecvențe date se suprapune peste poziția valorii maxime ale altei frecvențe.

*Interpretarea funcției  $\gamma(\tau)$ .* Dispariția figurii de interferență, de ex. în interferometrul Michelson, poate fi de asemenea analizată considerând aspectele statistice ale dependenței de timp ale semnalului de radiație optică. Componenta electrică a semnalului monocromatic poate fi scrisă sub forma:

$$(3.3 1) \quad e(t) = E(t) \cos[\omega_0 t + \phi(t)],$$

în care dependența de timp a mărimilor  $E(t)$  și  $\phi(t)$  poate fi descrisă numai considerând proprietățile statistice ale câmpului radiației optice.

Să considerăm fluctuația medie pătratică a fazei pe intervalul de timp  $\Delta t$ :

$$\langle \delta\phi(\Delta t)^2 \rangle = \langle [\phi(t + \Delta t) - \phi(t)]^2 \rangle = \langle [\phi(t) - \phi(t - \Delta t)]^2 \rangle.$$

Pentru simplificare să considerăm că media variației fazei este egală cu zero, adică variațiile pozitive sunt identice cu cele negative:

$$\langle \delta\phi(\Delta t) \rangle = \langle \phi(t + \Delta t) - \phi(t) \rangle = 0.$$

Să notăm cu  $\tau_c$  valoarea intervalului de timp pentru care valoarea fluctuației mediei pătratică a fazei este de ordinul  $\langle \delta\phi(\tau_c)^2 \rangle = 1 \text{ rad}$ . Dacă pentru iluminarea interferometrului Michelson se utilizează o asemenea sursă, atunci, pentru

$\tau = \frac{2d}{c} = \tau_c$ , între cele două brațe apare o diferență de fază medie pătratică egală cu

1 rad, iar vizibilitatea figurii de interferență se va micșora.

Presupunem că divizorul de amplitudine este ideal, adică elongațiile celor două câmpuri obținute prin divizare sunt egale. Dacă  $e(t)$  reprezintă semnalul la detector provenit de la oglinda  $O_1$  (fig. 14), atunci  $e(t - \tau)$  (semnalul la detector provenit de la oglinda  $O_2$ ) reprezintă valoarea elongației la un moment anterior. Densitatea spectrală de flux la nivelul detectorului este proporțională cu media în timp al pătratelor semnalului total:

(3.3 2)

$$\Phi_d = \langle [e(t) + e(t - \tau)]^2 \rangle = \langle e(t)^2 \rangle + \langle e(t - \tau)^2 \rangle + 2\langle e(t)e(t - \tau) \rangle,$$

unde valoarea medie se calculează conform relației:

$$\langle e(t)^2 \rangle = \frac{1}{T} \int_{t_0 - T/2}^{t_0 + T/2} e(t)^2 dt.$$

Valoarea intervalului timpului de mediere se consideră atât de mare încât rezultatul integrării nu depinde de momentul  $t_0$  în jurul căruia este centrat intervalul de măsură, deci se poate considera  $T \rightarrow \infty$ .

Mărimile  $\langle e(t)^2 \rangle$  și  $\langle e(t - \tau)^2 \rangle$  reprezintă densitățile spectrale de flux la

nivelul detectorului care provin de la cele două brațe, fiind egale cu  $\frac{\Phi_0}{2}$ , dacă sursa de

radiație este staționară și nepolarizată ( $\Phi_0 = \langle e(t)^2 \rangle + \langle e(t - \tau)^2 \rangle$  - intensitatea totală la receptor, dacă fenomenul de interferență nu este prezent).

Termenul  $2\langle e(t)e(t - \tau) \rangle$  reprezintă rezultatul efectului de interferență. Pentru a descrie cantitativ acest rezultat se definește mărimea normalizată:

$$(3.3 3) \quad \gamma(\tau) = \frac{2\langle e(t)e(t - \tau) \rangle}{\langle e(t)^2 \rangle + \langle e(t - \tau)^2 \rangle} = \frac{\langle e(t)e(t - \tau) \rangle}{\langle e(t)^2 \rangle}.$$

În aceste condiții relația (3.3 2) devine:

$$(3.3 4) \quad \Phi_d = \Phi_0 [1 + \gamma(\tau)].$$

iar  $\gamma(\tau)$  reprezintă funcția de autocorelare a semnalului  $e(t)$ . Această funcție descrie corelarea mărimii  $e(t)$  cu aceeași mărime definită la un moment anterior. Funcția de

autocorelare este echivalentă cu termenul oscilant normal introdus în relația (3.2 12), deci:

$$(3.3 5) \quad \gamma(\tau) = \frac{\langle e(t)e(t-\tau) \rangle}{\langle e(t)^2 \rangle} = \int_0^\infty g(v) \cos \omega \tau dv.$$

Aceast rezultat este cunoscută sub denumirea de *teorema Wiener-Khinchine*: funcția de autocorelare normală a unui semnal reprezintă transformata Fourier a funcției de distribuție spectrală a semnalului.

Dacă câmpul este reprezentat prin semnal analitic atunci funcția (3.3 1) are forma:

$$(3.3 6) \quad e(t) = \text{Re}\{E(t)\exp[i(\omega_0 t + \phi(t))]\},$$

iar forma funcției de autocorelare devine:

$$(3.3 7) \quad \tilde{\gamma}(\tau) = \frac{\langle \tilde{e}(t)\tilde{e}(t-\tau)^* \rangle}{\langle \tilde{e}(t)^2 \rangle}, \text{ unde: } \gamma(\tau) = \text{Re } \tilde{\gamma}(\tau).$$

### 3.3.1 Funcția de autocorelare a radiației monocromatice

Funcția de distribuție spectrală a radiației monocromatice este centrată pe frecvența  $\nu_0$ , are o lățime spectrală  $\Delta\nu$ , câmpul fiind descris de relația (3.3 1), iar termenul oscilant normal corespunzător este descris de relația (3.2 8).

$$\gamma(\tau) = C(\tau) \cos \omega_0 \tau + S(\tau) \sin \omega_0 \tau = U(\tau) \cos[\omega_0 \tau + \phi(\tau)].$$

Să calculăm funcția de autocorelare pentru acest tip de radiație.

$$\begin{aligned} \langle e(t)e(t-\tau) \rangle &= \\ &= \langle E(t)E(t-\tau) \cos[\omega_0 t + \phi(t)] \cos[\omega_0(t-\tau) + \phi(t-\tau)] \rangle = \\ &= \left\langle E(t)E(t-\tau) \left\{ \frac{1}{2} \cos[\omega_0(2t-\tau) + \phi(t) + \phi(t-\tau)] + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{2} \cos[\omega_0 \tau + \phi(t) - \phi(t-\tau)] \right\} \right\rangle \\ &= \frac{1}{2} \langle E(t)E(t-\tau) \cos[\omega_0 \tau + \phi(t) - \phi(t-\tau)] \rangle \end{aligned}$$

$$\text{Deoarece: } \langle e(t) \rangle^2 = \frac{\langle E(t) \rangle^2}{2}, \text{ se obține:}$$

$$(3.3 8) \quad \gamma(\tau) = \frac{\langle E(t)E(t-\tau) \cos[\omega_0 \tau + \phi(t) - \phi(t-\tau)] \rangle}{\langle E(t)^2 \rangle}.$$

Mărimea  $\gamma(\tau)$  depinde de diferența fazelor  $[\phi(t) - \phi(t-\tau)]$ . Dacă valoarea timpului de retardare este mică, atunci fluctuația fazei este mică, ceea ce implică o fluctuație mică a amplitudinii ( $E(t-\tau) \cong E(t)$ ). În aceste condiții se obține valoarea descrisă de relația (3.2 2) ( $\gamma(\tau) = \cos \omega_0 \tau$ ) a factorului oscilant normal caracteristic radiației armonice.

Dacă valoarea fluctuației medii pătratice a fazei este de ordinul unui radian, factorul  $\cos$  va prezenta fluctuații mari, media lui va fi mult mai mică decât valoarea  $\cos \omega_0 \tau$ , iar vizibilitatea tabloului de interferență se va micșora.

Dacă în relația (3.3 8) se dezvoltă funcția  $\cos$  se obține:

$$\begin{aligned} \gamma(\tau) &= \frac{\langle E(t)E(t-\tau) \cos[\phi(t) - \phi(t-\tau)] \rangle}{\langle E(t)^2 \rangle} \cos \omega_0 \tau - \\ (3.3 9) \quad &- \frac{\langle E(t)E(t-\tau) \sin[\phi(t) - \phi(t-\tau)] \rangle}{\langle E(t)^2 \rangle} \sin \omega_0 \tau = \\ &= C(\tau) \cos \omega_0 \tau + S(\tau) \sin \omega_0 \tau = U(\tau) \cos[\omega_0 \tau + \phi(\tau)] \end{aligned}$$

Dacă se utilizează expresia analitică a semnalului, atunci forma funcției de autocorelare este:

$$(3.3 10) \quad \gamma(\tau) = \frac{e^{i\omega_0 \tau} \langle E(t)E(t-\tau) e^{i[\phi(t) - \phi(t-\tau)]} \rangle}{\langle E(t)^2 \rangle} = U(\tau) e^{i[\omega_0 \tau + \phi(\tau)]},$$

unde s-a notat:

$$\frac{\langle E(t)E(t-\tau) e^{i[\phi(t) - \phi(t-\tau)]} \rangle}{\langle E(t)^2 \rangle} = U(\tau) e^{i\phi(t)}.$$

Partea reală a relației (3.3 10) conduce la expresia mărimii  $\gamma(\tau)$ .

Deci pentru a cunoaște funcția de autocorelare este necesar să avem informații despre funcțiile  $E(t)$  și  $\phi(t)$ . De ex. în cazul semnalului radio sau a celui obținut de la un laser *monomodal*, valoarea amplitudinii  $E$  este constantă, iar mărimile  $\gamma$ ,  $C$ ,  $S$  și  $U$  vor depinde numai de fluctuația fazei, adică vor fi de forma:

$$C(\tau) = \langle \cos[\phi(t) - \phi(t-\tau)] \rangle, \text{ respectiv: } S(\tau) = \langle \sin[\phi(t) - \phi(t-\tau)] \rangle.$$



### 3.3.2 Funcția de autocorelare pentru radiația termică.

Semnalele generate de dipolii electrici (oscilatorii) individuali care contribuie la formarea radiației termice sunt independente între ele, iar interferometrul Michelson nu poate detecta interferența surselor individuale; prin urmare tabloul de interferență reprezintă suprapunerea tablourilor individuale, adică semnalul generat de fiecare dipol electric interferează cu el însuși.

Deoarece forma semnalului real este:

$$(3.3.11) \quad e(t) = \sum_{j=1}^N e_j(t) = \sum_{j=1}^N E_j(t) \cos[\omega_0 t + \phi_j(t)],$$

cea a funcției de autocorelare va fi:

$$\gamma(\tau) = \frac{\langle e(t)e(t-\tau) \rangle}{\langle e(t)^2 \rangle} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} e(t)e(t-\tau) dt}{\int_{-\infty}^{+\infty} e(t)^2 dt} =$$

$$= \frac{\sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \int_{-\infty}^{+\infty} E_j(t-\tau) E_k(t) \cos[\omega_0(t-\tau) + \phi_j(t-\tau)] \cos[\omega_0 t + \phi_k(t)] dt}{\sum_{j=1}^N \int_{-\infty}^{+\infty} E_j^2(t) \cos^2[\omega_0 t + \phi_j(t)] dt}$$

$$= \frac{1}{\sum_{j=1}^N \int_{-\infty}^{+\infty} E_j^2(t) \cos^2[\omega_0 t + \phi_j(t)] dt} \times$$

$$\times \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \int_{-\infty}^{+\infty} E_j(t-\tau) E_k(t) \left\{ \frac{1}{2} \cos[\omega_0 \tau + \phi_k(t) - \phi_j(t-\tau)] + \frac{1}{2} \cos[\omega_0(2t-\tau) + \phi_k(t) + \phi_j(t-\tau)] \right\} dt =$$

$$= \frac{\sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \int_{-\infty}^{+\infty} E_j(t-\tau) E_k(t) \cos[\omega_0 \tau + \phi_k(t) - \phi_j(t-\tau)] dt}{\sum_{j=1}^N \int_{-\infty}^{+\infty} E_j^2(t) \cos^2[\omega_0 t + \phi_j(t)] dt}$$

Deoarece oscilatorii sunt independenți, pentru fiecare pereche cu o valoare dată a mărimii  $\cos[\omega_0 t + \phi_k(t) - \phi_j(t-\tau)]$ , va exista o altă pereche pentru care mărimea  $\cos[\omega_0 t + \phi_j(t) - \phi_k(t-\tau)]$  va avea semn opus, deci rezultatul medierii va fi zero, iar suma se va extinde numai asupra termenilor  $j = k$ .

$$(3.3.12) \quad \gamma(\tau) = \frac{\sum_{j=1}^N \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} E_j(t-\tau) E_k(t) \cos[\omega_0 \tau + \phi_j(t) - \phi_j(t-\tau)] dt}{\sum_{j=1}^N \int_{-\infty}^{+\infty} E_j^2(t) \cos^2[\omega_0 t + \phi_j(t)] dt}$$

Din expresia (3.3.8) a funcției de autocorelare pentru un oscilator  $j$ :

$$\gamma_j(\tau) = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} E_j(t-\tau) E_j(t) \cos[\omega_0 \tau + \phi_j(t) - \phi_j(t-\tau)] dt}{\int_{-\infty}^{+\infty} E_j^2(t) \cos^2[\omega_0 t + \phi_j(t)] dt}$$

se obține:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} E_j(t-\tau) E_j(t) \cos[\omega_0 \tau + \phi_j(t) - \phi_j(t-\tau)] dt = \gamma_j(\tau) \int_{-\infty}^{+\infty} E_j^2(t) dt.$$

iar relația (3.3.12) devine:

$$(3.3.13) \quad \gamma(\tau) = \frac{\sum_{j=1}^N \gamma_j(\tau) \int_{-\infty}^{+\infty} E_j^2(t) dt}{\sum_{j=1}^N \int_{-\infty}^{+\infty} E_j^2(t) dt}$$

Această relație reprezintă media ponderată a funcțiilor de autocorelare individuale, unde factorul de ponderare:  $\int_{-\infty}^{+\infty} E_j^2(t) dt$  este proporțional cu energia totală emisă de oscilatorul  $j$ . Dacă oscilatorii individuali sunt identici, fiecare fiind caracterizat prin același factor  $\gamma_j(\tau)$ , atunci:

$$(3.3.14) \quad \gamma(\tau) = \gamma_j(\tau),$$

adică funcția de autocorelare macroscopică, care reprezintă partea oscilatorie normată a tabloului de interferență (parte ce poate fi măsurată direct), reprezintă funcția de autocorelare a câmpului radiat de oscilatorul microscopic individual.

Rezultatul descris de relația (3.3.13) este valabil pentru orice sursă termică.

### 3.3.2.1 Funcția de autocorelare și cea de distribuție spectrală pentru câteva modele de surse termice.

Aceste rezultate sunt folosite pentru a calcula, pentru modele simple de sisteme ce radiază, funcția de autocorelare  $\gamma_j(\tau)$ , funcția de autocorelare totală și funcția de distribuție spectrală. Pentru simplificare presupunem că faza  $(\phi_j)$  a semnalului monocromatic este constantă, deci fluctuațiile amplitudinii  $(E_j)$  acționează ca o înfășurătoare care modulează oscilațiile rapide ale factorului  $\cos$ . Prin urmare relația (3.3.8) se poate scrie sub forma:

$$(3.3.15) \quad \gamma(\tau) = \gamma_j(\tau) = \frac{\langle E(t)E(t-\tau)\cos[\omega_0\tau + \phi(t) - \phi(t-\tau)] \rangle}{\langle E(t)^2 \rangle} = \frac{\langle E(t)E(t-\tau) \rangle}{\langle E(t)^2 \rangle} \cos \omega_0\tau = \gamma_E(\tau) \cos \omega_0\tau$$

unde factorul  $\cos \omega_0\tau$ , caracteristic funcției armonice, este modulat de funcția de autocorelare a semnalului  $E(t)$ .

Dacă mărimea este considerată constantă, conform relației (3.3.9), se obține:

$$(3.3.16a) \quad C(\tau) = \frac{\langle E(t)E(t-\tau)\cos[\phi(t) - \phi(t-\tau)] \rangle}{\langle E(t)^2 \rangle} = \frac{\langle E(t)E(t-\tau) \rangle}{\langle E(t)^2 \rangle} = \gamma_E(\tau),$$

$$(3.3.16b) \quad -S(\tau) = \frac{\langle E(t)E(t-\tau)\sin[\phi(t) - \phi(t-\tau)] \rangle}{\langle E(t)^2 \rangle} = 0,$$

$$\text{unde:} \quad C(\tau) = \gamma_E(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} D(\mu) \cos 2\pi\mu\tau d\mu,$$

iar funcția de distribuție spectrală este:

$$(3.3.17) \quad g(\nu) = D(\nu - \nu_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} C(\tau) \cos[2\pi(\nu - \nu_0)\tau] d\tau = 2 \int_0^{+\infty} C(\tau) \cos[2\pi(\nu - \nu_0)\tau] d\tau$$

1. - *Lățimea radiativă a tranziției.* În timpul procesului de emisie, dipolul electric excitat, dar neperturbat, radiază o undă periodică care prezintă o înfășurătoare exponențială:

$$e(t) = E e^{-\frac{t}{T_1}} \cos(\omega_0 t + \phi), \text{ pentru: } t \geq 0$$

$$e(t) = 0, \text{ pentru: } t < 0,$$

unde  $T_1$  reprezintă timpul de viață radiativ (timpul de relaxare).

Funcția de autocorelare se obține prin corelarea a două unde amortizate, retardate una față de alta cu intervalul de timp  $\tau$  (fig. 17 a):

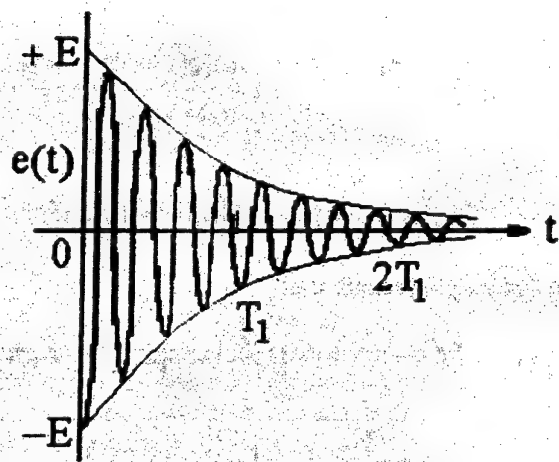
$$\gamma_E(\tau) = \frac{E^2 \int_0^{\infty} e^{-\frac{t}{T_1}} e^{-\frac{t-\tau}{T_1}} dt}{E^2 \int_0^{\infty} e^{-\frac{2t}{T_1}} dt} = \frac{e^{-\frac{\tau}{T_1}} \left[ \int_0^{\infty} e^{-\frac{2t}{T_1}} dt - \int_0^{\tau} e^{-\frac{2t}{T_1}} dt \right]}{\int_0^{\infty} e^{-\frac{2t}{T_1}} dt} = e^{-\frac{|\tau|}{T_1}},$$

unde integrala este definită pe domeniul  $\tau \div \infty$ , iar mărimea  $\tau$  este numai pozitivă.

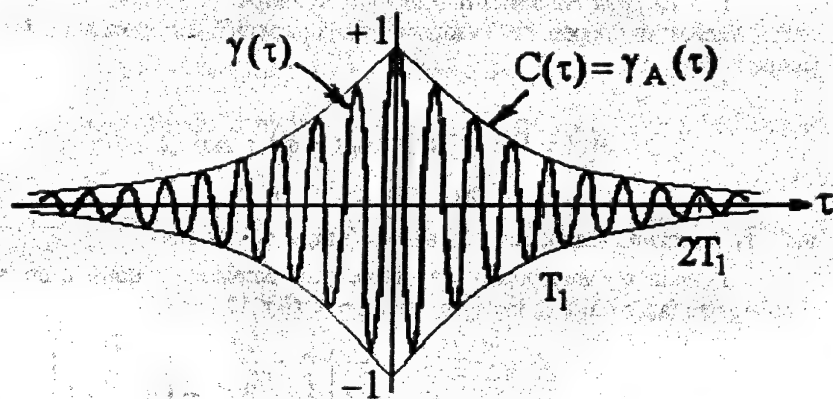
Prin urmare:

$$(3.3.19) \quad \gamma(\tau) = \gamma_E(\tau) \cos \omega_0\tau = e^{-\frac{|\tau|}{T_1}} \cos \omega_0\tau \text{ (fig. 17 b).}$$

Funcția de distribuție spectrală ce caracterizează acest ansamblu de dipoli electrici, este dată de relația:



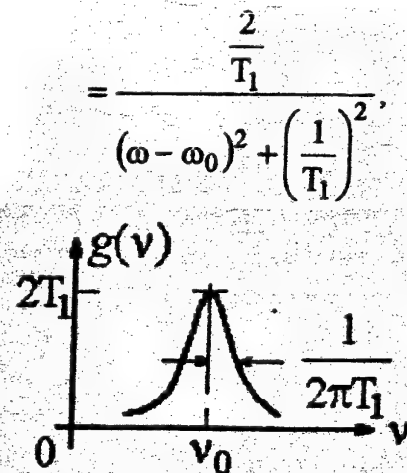
(a)



(b)

Fig. 17 a,b

$$\begin{aligned}
 g(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} C(\tau) \cos 2\pi(\nu - \nu_0)\tau d\tau = \\
 (3.3 20) \quad &= \text{Re} \left\{ \int_0^{\infty} e^{-\frac{\tau}{T_1}} e^{-i2\pi(\nu - \nu_0)\tau} d\tau + \int_{-\infty}^0 e^{\frac{\tau}{T_1}} e^{-i2\pi(\nu - \nu_0)\tau} d\tau \right\} =
 \end{aligned}$$

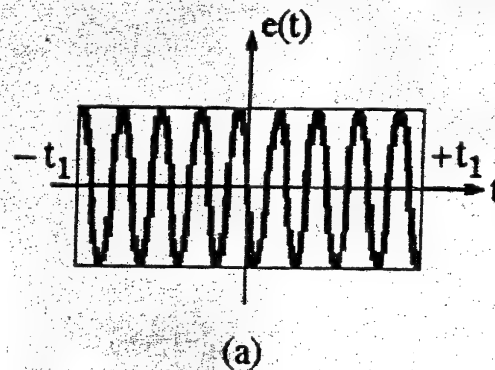


(c)

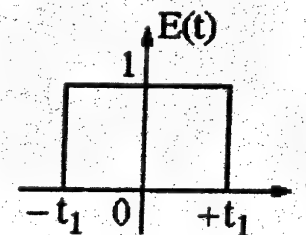
Fig. 17 c

unde  $T_1 \gg T_2$ , deci lăţimea este mult mai mică decât cea obţinută în prezenţa ciocnirilor. Funcţia de distribuţie spectrală este prezentată în fig. 17 c.

2. - *Cazul pulsului dreptunghiular* (semnal sinusoidal limitat într-un interval de timp dat). Funcţia  $E(t - \tau)$  reprezintă funcţia  $E(t)$  (fig. 18 a,b) deplasată cu intervalul de timp  $\tau$  (fig. 18 c). Mărima  $\langle E(t)E(t - \tau) \rangle$  este proporţională cu aria haşurată:  $(2t_1 - \tau)E_0^2$  pentru  $\tau \leq 2t_1$ .



(a)



(b)

Fig. 18 a,b



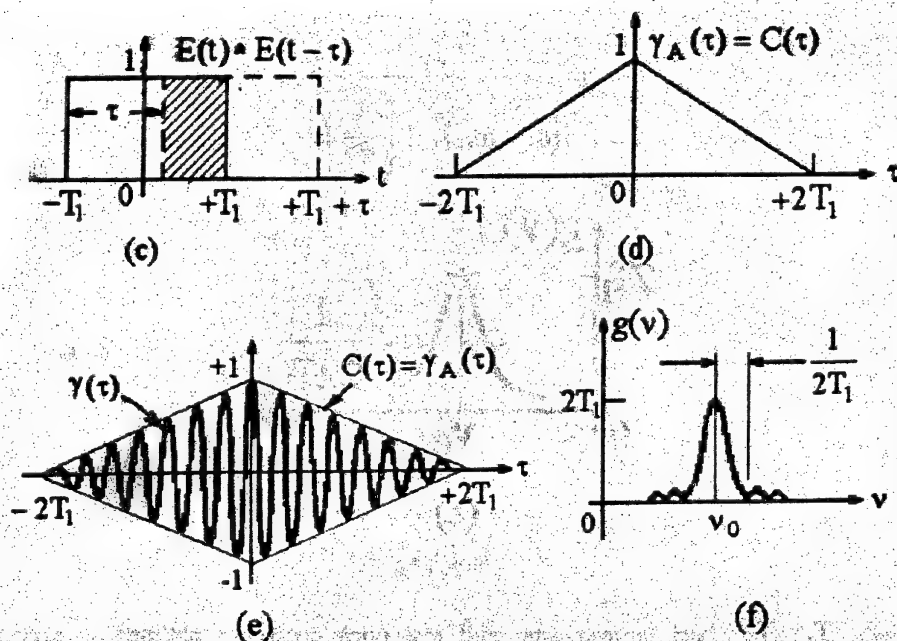


Fig. 18 c,d,e,f

În fig. 18 d este prezentată funcția  $C(\tau)$ :

$$C(\tau) = \gamma_E(\tau) = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} E(t)E(t-\tau)dt}{\int_{-\infty}^{+\infty} E(t)^2 dt} = \frac{(2t_1 - \tau)E_0^2}{2t_1 E_0^2} = 1 - \frac{|\tau|}{2t_1}, \text{ pt. } |\tau| \leq 2t_1$$

$$C(\tau) = \gamma_E(\tau) = 0, \text{ pentru: } |\tau| > 2t_1,$$

iar în fig. 18 e funcția totală de autocorelație:

$$(3.3 21) \quad \gamma(\tau) = \gamma_E(\tau) \cos \omega_0 \tau = \left(1 - \frac{|\tau|}{2t_1}\right) \cos \omega_0 \tau,$$

Funcția de distribuție spectrală dată de relația:

(3.3 22)

$$g(v) = 2 \int_0^{2t_1} \left(1 - \frac{\tau}{2t_1}\right) \cos[2\pi(v - v_0)\tau] d\tau = \frac{2t_1 \sin^2[2\pi(v - v_0)t_1]}{[2\pi(v - v_0)t_1]^2}.$$

care coincide cu funcția descrisă de relația (1 7.7), este prezentată grafic în fig. 18 f.

3. - *Lărgirea determinată de procesul de ciocniri.* Acest proces poate fi modelat în modul următor. Procesul de emisie al dipolului electric este perturbat de ciocnirea cu alt dipol, după care se continuă fără a prezenta corelare de fază cu cel anterior ciocnirii. Pe intervalul de timp cuprins între două ciocniri, semnalul poate fi considerat dreptunghiular (fig. 18 a). Dacă  $t_c = 2t_1$  reprezintă intervalul de timp dintre două ciocniri, funcția de autocorelare a câmpului *em* între două ciocniri va fi:

$$\gamma(t_c, \tau) = C(t_c, \tau) \cos \omega_0 \tau, \text{ unde:}$$

$$C(t_c, \tau) = \left(1 - \frac{|\tau|}{t_c}\right), \text{ pentru: } t_c \geq |\tau|,$$

$$C(t_c, \tau) = 0, \text{ pentru: } t_c < |\tau|$$

iar funcția de autocorelare totală este dată de relația (3.3 13):

$$\gamma(\tau) = \frac{\sum_{j=1}^N \gamma_j(\tau) \int_{-\infty}^{+\infty} E_j^2(t) dt}{\sum_{j=1}^N \int_{-\infty}^{+\infty} E_j^2(t) dt}.$$

Dacă considerăm că toate semnalele fragmentate au aceeași amplitudine  $E_j(t) = ct$ , factorul de ponderare poate fi scris sub forma:

$$\langle E_j^2(t') \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} E_j^2(t) dt' = E_j^2 t_c.$$

Sumarea după  $j$  se poate înlocui cu integrala după  $t_c$  (trebuie înmulțit cu probabilitatea de ciocnire a dipolului și intervalul de timp dat):

$$\sum_j E_j^2 t_c \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} t_c E_j^2 P(t_c) dt_c,$$

unde  $P(t_c) dt_c$  reprezintă probabilitatea de ciocnire a dipolului în intervalul  $t_c \div t_c + dt_c$ .

Să considerăm că la momentul  $t = 0$  ansamblul conține  $n(0)$  dipoli electrici, iar la momentul  $t_c$  au rămas neciocniți  $n(t_c)$  dipoli. În intervalul  $t_c \div t_c + dt_c$  vor fi ciocniți  $\Delta n$  dipoli, dat de relația:

$$dn(t_c) = k_c n(t_c) dt_c = -n(t_c) \frac{dt_c}{T_2}, \text{ unde:}$$

$T_2$  - timpul mediu de ciocnire sau timpul mediu de defazare, iar  $k_c$  - frecvența ciocnirilor. Semnul "-" arată că numărul dipolilor neciocniți scade cu creșterea timpului. Din această relație rezultă:

$$\int_{n(0)}^{n(t_c)} \frac{dn(t_c)}{n(t_c)} = - \int_0^{t_c} \frac{dt_c}{T_2}, \text{ de unde: } n(t_c) = n(0) e^{-\frac{t_c}{T_2}},$$

adică numărul de dipoli neciocniți scade exponențial cu timpul. Ceilalți dipoli, în intervalul de timp  $t_c$  au suferit una sau mai multe ciocniri. Prin urmare după intervalul de timp  $t_c$ , probabilitatea ca un dipol electric să nu sufere nici o ciocnire este egală cu  $e^{-\frac{t_c}{T_2}}$ , iar probabilitatea ca în intervalul  $dt_c$  acesta să fie supus unei ciocniri este:

$$P(t_c) = -\frac{1}{n(0)} \frac{dn(t_c)}{dt_c} = -\frac{1}{n(0)} \left[ -\frac{n(t_c)}{T_2} \right] = \frac{1}{T_2} e^{-\frac{t_c}{T_2}}$$

$$P(t_c) dt_c = \frac{dt_c}{T_2} e^{-\frac{t_c}{T_2}},$$

unde timpul mediu dintre două ciocniri este:

$$T_2 = \int_0^{\infty} t_c P(t_c) dt_c.$$

Considerând că toți dipolii electrici emit cu aceeași amplitudine iar suma poate fi transformată în integrală, funcția de autocorelare totală devine:

$$\gamma(\tau) = \frac{\sum_{j=1}^N \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} E_j^2(t_c) dt_c \right] C_j(\tau) \cos \omega_0 \tau}{\sum_{j=1}^N \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} E_j^2(t_c) dt_c \right]} =$$

$$= \frac{\cos \omega_0 \tau \left[ E_j^2 C_j(\tau) \int_0^{+\infty} P(t_c) dt_c \right]}{E_j^2 \int_0^{+\infty} P(t_c) dt_c} = C_j(\tau) \cos \omega_0 \tau.$$

$$\text{Dar: } C(\tau) = \int_{\tau}^{\infty} \left( 1 - \frac{\tau}{t_c} \right) \frac{t_c}{T_2} e^{-\frac{t_c}{T_2}} \frac{dt_c}{T_2} = e^{-\frac{\tau}{T_2}}.$$

Deci:

$$(3.3.23) \quad \gamma(\tau) = e^{-\frac{|\tau|}{T_2}} \cos \omega_0 \tau = \operatorname{Re} \left[ e^{-\frac{|\tau|}{T_2}} \frac{e^{i\omega_0 \tau} + e^{-i\omega_0 \tau}}{2} \right].$$

Expresia funcției de distribuție spectrală este:

$$(3.3.24) \quad g(\omega) = D(\nu - \nu_0) = D(\mu) = \int_{-\infty}^{+\infty} C(\tau) \cos[2\pi(\nu - \nu_0)\tau] d\tau =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} C(\tau) e^{-i2\pi\mu\tau} d\tau = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{\tau}{T_2}} e^{-i2\pi\mu\tau} d\tau + \int_{-\infty}^0 e^{\frac{\tau}{T_2}} e^{-i2\pi\mu\tau} d\tau =$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{T_2} + i2\pi\mu} + \frac{1}{\frac{1}{T_2} - i2\pi\mu} = \frac{\frac{2}{T_2}}{(2\pi\mu)^2 + \left(\frac{1}{T_2}\right)^2} = \frac{\frac{2}{T_2}}{(\omega - \omega_0)^2 + \left(\frac{1}{T_2}\right)^2}$$

În această relație  $T_2 = \frac{\lambda}{\bar{\nu}} = \frac{kT}{\sigma p} \sqrt{\frac{\pi m}{8kT}}$ , unde  $\lambda = \frac{1}{\sigma n}$ ,  $\lambda$  - drumul

liber mediu,  $\sigma$  - secțiunea eficace de ciocnire,  $n = \frac{p}{kT}$  - numărul de dipoli din

unitate de volum, iar  $\bar{\nu} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$ .

Mărima  $g(v)$  reprezintă o funcție Lorentz normată. Se observă că  $g(\omega_0) = 2T_2$ , iar semilățimea este:  $\Delta v = \frac{1}{2\pi T_2}$

4. *Lărgirea Doppler.* O cauză importantă a lărgirii spectrale a semnalului emis de către un ansamblu de dipoli electrici aflați în mișcare la echilibru termodinamic este efectul Doppler. Frecvența radiației monocromatice emisă de către aceștia, față de sistemul de referință legat de dipol, este egală cu  $v_0$ . Dacă dipolul se deplasează față de observator cu viteza  $V$ , acesta observă frecvența:

$$v = v_0 \left( 1 + \frac{V}{c} \right), \text{ de unde: } v = \frac{v - v_0}{v_0} c.$$

La echilibru termodinamic, vitezele se supun legii de distribuție a lui Maxwell:

$$P(v)dv = \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv, \text{ unde: } \langle v^2 \rangle = \frac{3kT}{m},$$

corespunzător, funcția de distribuție spectrală determinată de dependența frecvenței de viteza de deplasare a dipolului este:

$$(3.3.25) \quad g(v)dv = \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} e^{-\frac{m(v-v_0)^2 c^2}{2kT v_0^2}} \frac{c}{v_0} dv = \frac{\tau_D \sqrt{\pi} v_0}{c} \frac{c}{v_0} e^{-\pi^2 \tau_D^2 (v-v_0)^2} dv = \tau_D \sqrt{\pi} e^{-\pi^2 \tau_D^2 (v-v_0)^2} dv$$

unde:  $\tau_D =$

Acest contur este de tip Gauss, centrat pe frecvența  $v_0$  și are lățimea:

$$\frac{g(v_0)}{e} = \frac{\sqrt{\pi} \tau_D}{e} = \frac{\sqrt{\pi} \tau_D}{e^{\pi^2 (v_1 - v_0)^2 \tau_D^2}}, \text{ de unde: } v_1 - v_0 = \pm \frac{1}{\pi \tau_D}.$$

Funcția de autocorelație este dată de relația:

$$(3.3.26) \quad \gamma(\tau) = C(\tau) \cos \omega_0 \tau = \tau e^{-\frac{\tau^2}{\tau_D^2}} \cos \omega_0 \tau.$$

Funcția  $g(v)$  reprezintă transformata Fourier a funcției  $\gamma(\tau)$ , deci trebuie efectuată

$$\text{transformata Fourier a funcției } C(\tau) = e^{-\left(\frac{\tau}{\tau_D}\right)^2}$$

$$\hat{C}(\mu) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\frac{\tau}{\tau_D}\right)^2} e^{-2\pi i \mu \tau} d\tau = \sqrt{\pi} \tau_D e^{-\pi^2 \mu^2 \tau_D^2}, \text{ deci:}$$

$$P(\mu) = C(v - v_0).$$

Rezultate obținute în cele trei cazuri au un element comun: atât lărgimea determinată de timpul mediu de viață ( $T_1$ ) cât și cea determinată de procesul de ciocniri ( $T_2$ ) reprezintă o măsură a timpului de coerență  $\tau_c$ . Lățimea funcției de distribuție spectrală monocromatică este de ordinul mărimii  $1/\tau_c$ . Lățirea Doppler se comportă la fel, deși timpul individual de emisie a dipolului este mult mai mare decât  $\tau_D$ . Deci se poate accepta ideea că lățimea domeniului spectral este corelată cu valoarea timpului de coerență:  $\Delta v \cong \frac{1}{\tau_c}$ . În general se introduce un interval de timp  $\tau_c \approx t_d$ , care reprezintă o măsură a domeniului temporal pentru care  $\gamma(\tau) \neq 0$ .

### 3.3.3 Definirea timpului de coerență și lățimea spectrală.

Pe baza celor prezentate se poate defini timpul de coerență  $\tau_c$ , caracteristic unui semnal cvazimonocromatic, și lățimea spectrală corespunzătoare  $\Delta v$ . Pentru definirea acestor mărimi există mai multe posibilități, dar considerăm definițiile introduse de către Mandel, prin relațiile:

$$(3.3.27) \quad a) \tau_c = 4 \int_0^{\infty} \gamma(\tau)^2 d\tau, \text{ respectiv: } b) \Delta v = \frac{1}{\int_0^{\infty} g(v)^2 dv}.$$

De ex., în cazul radiației monocromatice, dacă mărimile  $U$ ,  $\phi$ ,  $C$  și  $S$  variază foarte încet în intervalul de timp  $\tau$ , considerând relația (3.2.8), se obține:

$$\tau_c = 4 \int_0^{\infty} [U(\tau) \cos[\omega_0 \tau + \phi(\tau)]]^2 d\tau = 4 \int_0^{\infty} [C(\tau) \cos \omega_0 \tau + S(\tau) \sin \omega_0 \tau]^2 d\tau =$$



$$= 4 \int_0^{\infty} C(\tau)^2 \cos^2 \omega_0 \tau d\tau + 4 \int_0^{\infty} S(\tau)^2 \sin^2 \omega_0 \tau d\tau + \\ + 4 \int_0^{\infty} [C(\tau)S(\tau) \cos \omega_0 \tau \sin \omega_0 \tau] d\tau = 2 \int_0^{\infty} [C(\tau)^2 + S(\tau)^2] d\tau$$

Dacă se fac calculele se obțin rezultatele anterioare pentru timpul de coerență, respectiv lățimea spectrală a semnalului.

### 3.4 Coerența transversală.

În acest paragraf va fi analizată corelarea valorii câmpului electric în două puncte diferite ale acestuia. Răspunsul la această problemă este dat de teoria coerenței parțiale.

Timpul de coerență  $\tau_c$  poate fi interpretat ca o măsură a intervalului de timp în care faza fascicului monocromatic reține în "memorie" valoarea pe care a avut-o la un moment anterior. Pentru a analiza această mărime este necesar ca într-un punct al câmpului în care urmează să se evalueze valoarea timpului de coerență, valoarea câmpului să fie divizată în două părți, care sunt trimise pe drumuri diferite într-un alt punct, unde să interfere. Lungimea unui drum, față de cea a celuilalt poate fi variată, ceea ce corespunde introducerii unui timp de retardare. Se consideră că valoarea fazei rămâne corelată pe intervalul:

$$l_{\text{long}} = c \tau_c = \frac{c}{\Delta \nu}$$

numită lungimea coerenței longitudinale.

Într-un plan perpendicular la direcția de propagare a unui fascicul de raze paralele, faza câmpului are aceeași valoare în orice punct al planului. Pentru a caracteriza din acest punct de vedere corelarea câmpurilor se introduce noțiunea de coerență transversală (lungime de coerență transversală -  $(l_t)$ ) ca fiind distanța, într-un plan perpendicular la direcția de propagare, pentru care faza între două puncte rămâne corelată; fazele individuale pot prezenta fluctuații, dar fluctuează simultan cu aceeași valoare. Din acest punct de vedere se acceptă că în planul perpendicular la fasciculul colimat coerența transversală este perfectă. Pentru un fascicul necolimat, coerența transversală nu mai este perfectă. Dacă cele două puncte sunt separate printr-o distanță mai mică de  $(l_t)$ , atunci între ele există o corelare de fază bine definită, deci se poate observa efectul de interferență.

Stabilirea lungimii de coerență longitudinală, respectiv transversală se poate realiza prin două tipuri de experimente.

1. Un tip de măsurători, care permite stabilirea lungimii de coerență longitudinală, pot fi efectuate folosind o schemă bazată pe cea a interferometrului Michelson. În acest dispozitiv, obținerea celor două fascicule, care ulterior sunt supuse interferenței, se realizează cu ajutorul unei oglinzi semitransparente. Deoarece oglinda

acționează într-un punct dat al câmpului, aceasta este cunoscută sub denumirea de "divizor de amplitudine". Deplasarea unei oglinzi din cele două brațe ale interferometrului permite introducerea unui timp de retardare.

2. Al doilea tip de măsurători se bazează pe folosirea unui experiment de tip Young. În acest caz din câmpul de radiație optică supus analizei, folosind un ecran cu două fante, se selectează două surse, care pot fi considerate că emit două fascicule care urmează să interfere. Se pot realiza condiții experimentale astfel încât să se considere că cele două fante selectează radiație din același front de undă. De aceea sistemul este cunoscut sub denumirea de "divizor de front de undă". Acest sistem, prin modificarea distanței dintre cele două fante, permite selectarea unor câmpuri situate pe frontul de undă la distanțe diferite. Acest tip de măsurători dau informații asupra "coerenței transversale". Dacă pentru o distanță dată între fante, punctul în care se măsoară rezultatul interferenței se deplasează pe o direcție perpendiculară la mediatoarea segmentului care unește cele două fante se pot afla informații despre "coerența longitudinală" a câmpurilor selectate de cele două fante (funcție de distanța dintre punctele câmpului).

*Experimentul lui Young.* În acest experiment să considerăm o sursă de radiație punctiformă care emite unde armonice cu frecvența  $\nu$  și să urmărim modificările tabloului de interferență dacă aceasta este deplasată. Franja de ordin zero se formează în punctul în care este îndeplinită condiția:

$$SS_1P_0 = SS_2P_0.$$

(Deoarece punctul S se află pe mediatoarea segmentului  $S_1S_2$ , punctul  $P_0$  se va afla pe aceeași mediatoare). Distanța dintre franjele de interferență este dată de relația:

$$i = \frac{\lambda D}{h}, \text{ de unde: } \delta\theta' = \frac{i}{D} = \frac{\lambda}{h}.$$

(Deschiderea unghiulară sub care se vede o interfranjă din planul "divizorului de front de undă")

Să deplasăm sursa în punctul  $S'$ , dispus în planul perpendicular la direcția  $SP_0$ , în punctul S, astfel încât să formeze unghiul  $\theta$  cu mediatoarea. Dacă  $\theta$  și  $\theta'$  sunt unghiuri mici ( $h \ll SO, OP_0$ ), franja de ordin zero, respectiv întreg tabloul de interferență, se va deplasa cu unghiul  $\theta' = \theta$ . (În experimentul Young, pentru a observa tabloul de interferență, este necesar ca la nivelul fantei, fasciculul să fie împrăștiat prin fenomenul de difracție. Dacă lățimea fantei este egală cu  $W$ , densitatea

de flux scade la zero pentru direcțiile:  $\theta' = \theta \pm \frac{\lambda}{W}$ . Dacă  $h \ll W$ , unghiul de

difracție acoperă mai multe franje de interferență  $\left( \delta\theta' = \frac{\lambda}{h} \right)$ .

Franjele de interferență sunt perpendiculare la planul fig. 19 a,b, deci sunt perpendiculare și pe segmentul  $S_1S_2$ . Dacă sursa S se deplasează în afara planului,

atunci punctul  $P_0$  (franja de ordin zero) se deplasează spre interior, dar tabloul rămâne neschimbat. Aceeași comportare se întâmplă și dacă sursa  $S'$  se deplasează în același mod. Prin urmare, o distribuție tridimensională a punctelor sursei este echivalentă cu o distribuție bidimensională obținută prin proiectarea distribuției originale în planul schiței.

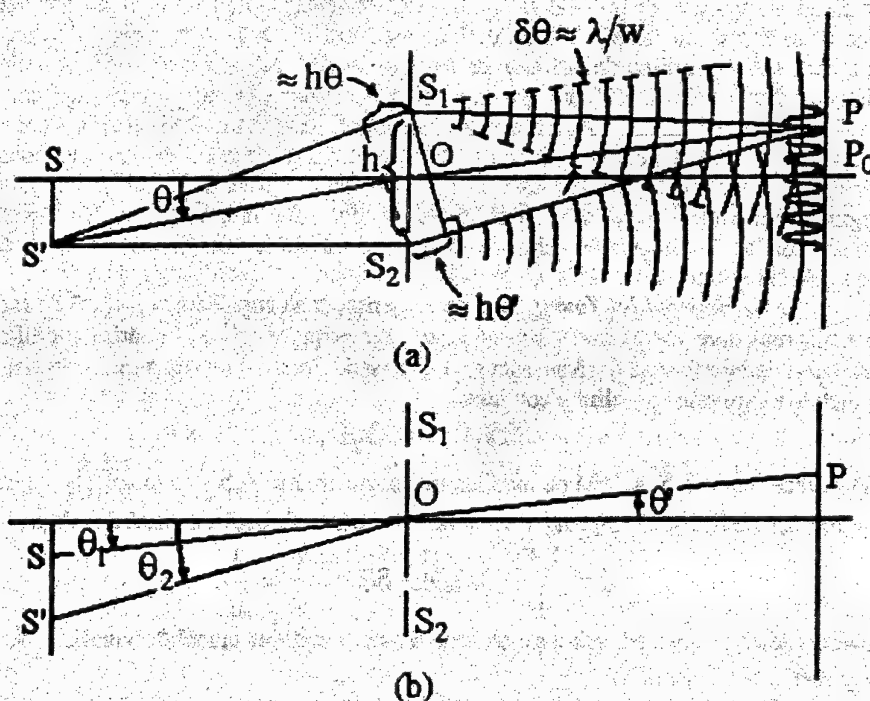


Fig. 19 a,b

Dacă în punctele  $S$  și  $S'$  se consideră două surse punctiforme necorelate între ele, atunci contrastul tabloului de interferență va depinde de intensitatea surselor și de unghiul  $\theta$ . Dacă intensitățile sunt egale, vizibilitatea dispare dacă deplasarea este egală cu un număr impar de  $\lambda/2$ .

Pentru o singură sursă  $S'$ , condiția de franjă zero este dată de relația:

$$S'S_2P - S'S_1P = h(\theta' - \theta),$$

iar ca interval de timp:  $\bar{\tau} = \frac{h(\theta' - \theta)}{c}$

Dacă câmpul emis de sursa de radiație este caracterizat prin  $\tau_c \gg \bar{\tau}$ , intensitatea în tabloul de interferență va fi dată de relația:

$$\begin{aligned} \varphi &= \varphi'_1 + \varphi'_2 + 2\sqrt{\varphi'_1\varphi'_2} \cos \omega\bar{\tau} = \varphi'_1(1 + \cos \omega\bar{\tau}) = \\ (3.4.1) \quad &= \varphi' \left\{ 1 + \cos \left[ \frac{\omega h(\theta' - \theta)}{c} \right] \right\} \end{aligned}$$

unde, dacă ar fi deschisă o singură fantă:  $\varphi'_1 = \varphi'_2 = \frac{\varphi_1}{2}$ .

Să considerăm că radiația optică incidentă pe "divizorul de front de undă" este emisă de două surse punctiforme necorelate între ele, localizate într-un plan perpendicular la axa optică și dispuse sub unghiurile  $\theta_1$  și  $\theta_2$  față de aceasta. Într-un punct al figurii de interferență, localizat față de axa optică sub unghiul  $\theta'$ , intensitatea este dată de relația:

$$(3.4.2) \quad \varphi = \varphi_1 \left\{ 1 + \cos \left[ \frac{\omega h(\theta' - \theta_1)}{c} \right] \right\} + \varphi_2 \left\{ 1 + \cos \left[ \frac{\omega h(\theta' - \theta_2)}{c} \right] \right\}.$$

Tabloul de interferență total rezultă din suprapunerea celor două tablouri de interferență. Vizibilitatea tabloului de interferență va fi minimă, dacă maximum de interferență al unui tablou coincide cu minimumul celuilalt:

$$\frac{\omega h(\theta_1 - \theta_2)}{c} = (2k+1)\pi, \text{ sau:}$$

$$\frac{h(\theta_1 - \theta_2)}{\lambda} = \frac{2k+1}{2} \text{ (număr impar de } \lambda/2),$$

iar vizibilitatea va fi maximă dacă:

$$\frac{\omega h(\theta_1 - \theta_2)}{c} = 2k\pi, \text{ sau: } \frac{h(\theta_1 - \theta_2)}{\lambda} = k$$

Vizibilitatea tabloului de interferență determinată de două surse. Vizibilitatea figurii de interferență este dată de relația:

$$V = \frac{\varphi_{\max} - \varphi_{\min}}{\varphi_{\max} + \varphi_{\min}}.$$

Din relația (3.4.2) rezultă:

$$\begin{aligned} \varphi &= \varphi_1 + \varphi_2 + \\ (3.4.3) \quad &\varphi_1 \left( \cos \frac{\omega h \theta'}{c} \cos \frac{\omega h \theta_1}{c} + \sin \frac{\omega h \theta'}{c} \sin \frac{\omega h \theta_1}{c} \right) + \\ &+ \varphi_2 \left( \cos \frac{\omega h \theta'}{c} \cos \frac{\omega h \theta_2}{c} + \sin \frac{\omega h \theta'}{c} \sin \frac{\omega h \theta_2}{c} \right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \varphi_1 + \varphi_2 + \left( \varphi_1 \cos \left[ \frac{\omega h \theta_1}{c} \right] + \varphi_2 \cos \left[ \frac{\omega h \theta_2}{c} \right] \right) \cos \left[ \frac{\omega h \theta'}{c} \right] + \\
&\quad \left( \varphi_1 \sin \frac{\omega h \theta_1}{c} + \varphi_2 \sin \frac{\omega h \theta_2}{c} \right) \sin \frac{\omega h \theta'}{c} = \\
&= \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_0 \cos \alpha \cos \frac{\omega h \theta'}{c} + \varphi_0 \sin \alpha \sin \frac{\omega h \theta'}{c} = \\
&= \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_0 \cos \left( \alpha - \frac{\omega h \theta'}{c} \right)
\end{aligned}$$

unde valoarea mărimii  $\varphi_0$  se obține pe baza relațiilor:

$$\begin{aligned}
\varphi_0 \cos \alpha &= \varphi_1 \cos \frac{\omega h \theta_1}{c} + \varphi_2 \cos \frac{\omega h \theta_2}{c} \\
\varphi_0 \sin \alpha &= \varphi_1 \sin \frac{\omega h \theta_1}{c} + \varphi_2 \sin \frac{\omega h \theta_2}{c}
\end{aligned}$$

de unde:

$$\begin{aligned}
(3.4.4) \quad \varphi_0^2 &= \varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \\
&+ 2\varphi_1\varphi_2 \left[ \cos \frac{\omega h \theta_1}{c} \cos \frac{\omega h \theta_2}{c} + \sin \frac{\omega h \theta_1}{c} \sin \frac{\omega h \theta_2}{c} \right] = \\
&= \varphi_1^2 + \varphi_2^2 + 2\varphi_1\varphi_2 \cos \frac{\omega h (\theta_2 - \theta_1)}{c}
\end{aligned}$$

Deoarece mărimea  $\varphi_0$  depinde de parametrul  $h$ , mărimea  $V$  va depinde de asemenea de distanța dintre fante. Expresia vizibilității este:

$$(3.4.5) \quad V(h, \theta') = \frac{\varphi_0}{\varphi_1 + \varphi_2}$$

Dacă variază unghiul  $\theta'$ , valorile extreme ale vizibilității tabloului de interferență sunt:

$$\begin{aligned}
V_{\max} &= 1, \text{ dacă: } \varphi_0 = \varphi_1 + \varphi_2, \text{ adică:} \\
\frac{\omega h (\theta_1 - \theta_2)}{c} &= 2k\pi, \text{ sau: } \frac{h(\theta_1 - \theta_2)}{\lambda} = k \\
V_{\min} &= \frac{|\varphi_1 - \varphi_2|}{\varphi_1 + \varphi_2}, \text{ dacă: } \varphi_0^2 = \varphi_1^2 + \varphi_2^2 - 2\varphi_1\varphi_2, \text{ adică:}
\end{aligned}$$

$$\frac{\omega h (\theta_1 - \theta_2)}{c} = (2k+1)\pi, \text{ sau: } \frac{h(\theta_1 - \theta_2)}{\lambda} = \frac{2k+1}{2}$$

Din aceste relații rezultă că pentru două surse punctiforme vizibilitatea figurii de interferență devine pentru prima dată minimă, dacă  $h$  este dat de relația:

$$h_1 = \frac{\lambda}{2(\theta_1 - \theta_2)},$$

prin urmare se poate determina valoarea deschiderii unghiulare  $\theta_1 - \theta_2 = \frac{\lambda}{2h_1}$ ,

dacă se cunoaște valoarea mărimii  $h_1$ .

### 3.4.1 Cazul unei distribuții continuă de surse.

În planul sursei considerăm o sursă de formă dreptunghiulară, iar toate sursele elementare de emisie ale acesteia ca fiind identice. Aceasta este echivalentă cu o sursă liniară dispusă între  $S$  și  $S'$ , sursa liniară fiind proiecția dreptunghiului. Pentru acest tip de sursă se definește funcția  $\varphi(\theta)d\theta$ , care va reprezenta dublul intensității unei singure fante pe ecran, provenind de la sursele localizate între  $\theta$  și  $\theta + d\theta$ . Intensitatea în tabloul de interferență va fi:

$$d\varphi = \varphi(\theta) \left\{ 1 + \cos \left[ \frac{\omega h (\theta' - \theta)}{c} \right] \right\} d\theta,$$

iar densitatea totală de flux corespunzătoare unghiului  $\theta'$  este:

$$(3.4.6) \quad \varphi = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\theta) \left\{ 1 + \cos \left[ \frac{\omega h (\theta' - \theta)}{c} \right] \right\} d\theta = \varphi_{\text{tot}} (1 + \gamma_{12}),$$

$$\text{unde: } \varphi_{\text{tot}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\theta) d\theta \text{ și } \gamma_{12} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\theta) \cos \frac{\omega h (\theta' - \theta)}{c} d\theta}{\varphi_{\text{tot}}}$$

De ex. să considerăm o sursă liniară poziționată prin unghiurile  $\theta_2 - \theta_1 = \Delta\theta$ , care emite fluxul total  $\varphi_{\text{tot}}$ , deci:

$$\begin{aligned}
\varphi(\theta) &= \frac{\varphi_{\text{tot}}}{\Delta\theta}, \text{ pentru: } \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2 \\
\varphi(\theta) &= 0, \text{ pentru: } \theta \geq \theta_2 \text{ și } \theta \leq \theta_1
\end{aligned}$$



Poziția unghiulară a centrului sursei este dată de:  $\theta_0 = \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}$ . Intensitatea în tabloul de interferență corespunzătoare unghiului  $\theta'$  este: (3.4.7)

$$\begin{aligned} \varphi(\theta') &= \frac{\varphi_{\text{tot}}}{\Delta\theta} \int_{\theta_0 - \frac{\Delta\theta}{2}}^{\theta_0 + \frac{\Delta\theta}{2}} \left[ 1 + \cos \frac{\omega h (\theta' - \theta)}{c} \right] d\theta = \\ &= \varphi_{\text{tot}} - \frac{\varphi_{\text{tot}}}{\Delta\theta} \frac{c}{\omega h} \left[ \sin \frac{\omega h (\theta' - \theta_0 - \frac{\Delta\theta}{2})}{c} - \sin \frac{\omega h (\theta' - \theta_0 + \frac{\Delta\theta}{2})}{c} \right] = \\ &= \varphi_{\text{tot}} \left[ 1 + \frac{c}{\omega h \Delta\theta} \sin \frac{\pi v h \Delta\theta}{c} \cos \frac{\omega h (\theta' - \theta_0)}{c} \right] \end{aligned}$$

Deci:

$$\varphi_{\text{max}}(\theta') = \varphi_{\text{tot}} \left[ 1 + \frac{\lambda}{\pi h \Delta\theta} \sin \frac{\pi h \Delta\theta}{\lambda} \right], \text{ pentru: } \frac{\omega h (\theta' - \theta_0)}{c} = 2k\pi,$$

$$\begin{aligned} \varphi_{\text{min}}(\theta') &= \varphi_{\text{tot}} \left[ 1 - \frac{\lambda}{\pi h \Delta\theta} \sin \frac{\pi h \Delta\theta}{\lambda} \right], \text{ pentru: } \\ \frac{\omega h (\theta' - \theta_0)}{c} &= (2k+1)\pi, \end{aligned}$$

Prima valoare a mărimii  $h$  pentru care  $V = 0$  (fig. 20) este dată de relația:

$$\frac{\pi h_1 \Delta\theta}{\lambda} = \pi, \text{ de unde: } h_1 = \frac{\lambda}{\Delta\theta} = l_{\text{tran}}$$

(față de  $h_1 = \frac{\lambda}{2(\theta_1 - \theta_2)}$ ), de două ori mai mare decât în cazul a două surse

punctiforme). În fig. 20 a este prezentată variația vizibilității tabloului de interferență dacă sursa de radiație este liniară, iar în fig. 20 b aceeași variație în cazul unei surse sub formă de disc.

Pentru ca o sursă extinsă să poată fi considerată drept o sursă punctiformă, este necesar ca valorile mărimilor  $h$  și  $\Delta\theta$  să permită obținerea unei vizibilități a tabloului de interferență  $V \cong 1$ . Pentru aceasta trebuie îndeplinită condiția:

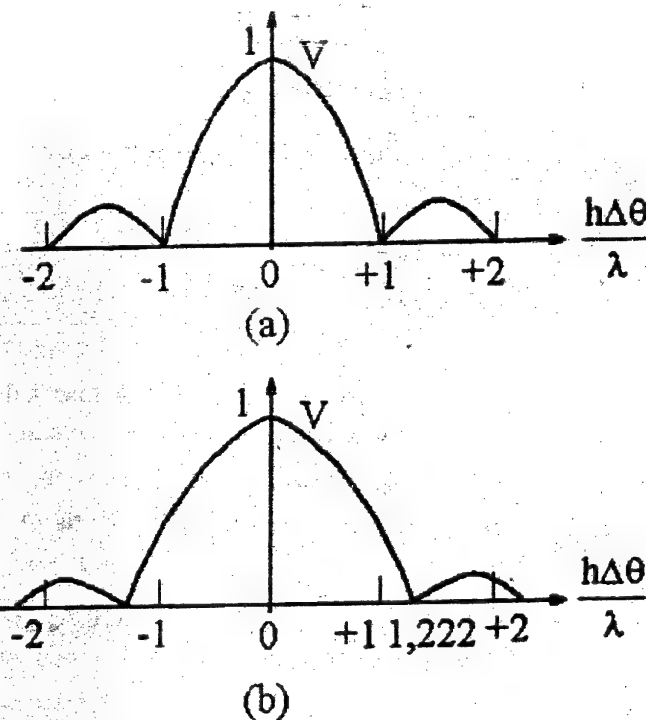


Fig. 20

$$\frac{\pi h \Delta\theta}{\lambda} \ll 1, \text{ deci } h \Delta\theta \ll \frac{\lambda}{\pi} \cong \lambda$$

Pentru ca o sursă extinsă să poată fi considerată drept o sursă punctiformă, este necesar ca valorile mărimilor  $h$  și  $\Delta\theta$  să permită obținerea unei vizibilități a tabloului de interferență  $V \cong 1$ . Pentru aceasta este necesar ca:

$$\frac{\pi h \Delta\theta}{\lambda} \ll 1, \text{ deci } h \Delta\theta \ll \frac{\lambda}{\pi} \cong \lambda$$

Prin urmare, dacă este satisfăcută condiția  $h \Delta\theta \ll \frac{\lambda}{\pi}$ , o sursă extinsă cu înălțimea unghiulară  $\Delta\theta$  va acționa ca o sursă punctiformă.

### 3.4.2 Distribuția spectrală a câmpului de radiație.

Vor fi folosite notațiile anterioare (fig. 19) și se va considera distribuția unghiulară a intensității  $\varphi(\theta)$ . Se introduce funcția de distribuție unghiulară normată:

$$i(\theta) = \frac{\varphi(\theta)}{\varphi_{\text{tot}}} \text{ cu proprietatea: } \int_{-\infty}^{+\infty} i(\theta) d\theta = 1.$$

Partea oscilatorie normată a figurii de interferență este de forma:

$$\varphi = \varphi_{\text{tot}} (1 + \gamma_{12}), \text{ unde:}$$

$$(3.4.8) \quad \gamma_{12} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\theta) \cos \frac{\omega h(\theta' - \theta)}{c} d\theta}{\varphi_{\text{tot}}} = \int_{-\infty}^{+\infty} i(\theta) \cos \frac{\omega h(\theta' - \theta)}{c} d\theta.$$

Presupunem că dependența de frecvență este descrisă de funcția de distribuție normată  $g(v)$ , iar toate sursele elementare sunt caracterizate prin aceeași funcție. Deci relațiile trebuie înmulțite cu  $g(v)$  și integrate. Termenii dependenți de frecvență urmează să fie mediați folosind funcție de ponderare  $g(v)$ . Funcția  $\varphi$  își va păstra forma:

$$(3.4.9) \quad \gamma_{12} = \int_{-\infty}^{+\infty} g(v) \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} i(\theta) \cos \frac{\omega h(\theta' - \theta)}{c} d\theta \right\} dv = \\ = \int_{-\infty}^{+\infty} i(\theta) \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} g(v) \cos \frac{\omega h(\theta' - \theta)}{c} dv \right\} d\theta.$$

Dacă se notează:  $\tau = \frac{\omega h(\theta' - \theta)}{c}$  se obține expresia funcției de autocorelare normată:

$$(3.4.9') \quad \gamma(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(v) \cos \omega \tau dv, \text{ deci:} \\ \gamma_{12} = \int_{-\infty}^{+\infty} i(\theta) \gamma \left[ \frac{h(\theta' - \theta)}{c} \right] d\theta$$

În cazul radiației monocromatice, funcția de autocorelare este:

$$\gamma(\tau) = U(\tau) \cos[\omega_0 \tau + \phi(\tau)],$$

unde:  $U(\tau)$  și  $\phi(\tau)$  sunt funcții lent-variabile față de variația funcției:  $\cos[\omega_0 \tau + \phi(\tau)]$ . Deci:

$$(3.4.10) \quad \gamma_{12} = \int_{-\infty}^{+\infty} i(\theta) U \left[ \frac{h(\theta' - \theta)}{c} \right] \cos \left\{ \frac{\omega_0 h(\theta' - \theta)}{c} + \phi \left[ \frac{h(\theta' - \theta)}{c} \right] \right\} d\theta.$$

Presupunem că atunci când unghiul  $\theta$  variază, valoarea mărimilor  $U(\tau)$  și  $\phi(\tau)$  rămâne constantă pe domeniul de variație  $\Delta\theta$ , centrat pe valoarea  $\theta_0$ . Deci mărimile

$U(\tau)$  și  $\phi(\tau)$  rămân constante atunci când mărimea  $\tau$  se modifică cu  $\frac{h \Delta\theta}{c}$  în jurul

valorii  $\tau = \frac{h(\theta' - \theta_0)}{c}$ . Pentru aceasta este necesar ca valoarea timpului de coerență

să îndeplinească condiția:  $\tau_c \gg \tau = \frac{h \Delta\theta}{c}$ . În aceste condiții mărimea  $h$  va fi de

ordinul lungimii de coerență transversală  $L_c$ :  $h \cong L_c \leq \frac{\lambda}{\Delta\theta}$  (condiția de sursă punctiformă).

Deci:  $\tau_c \gg \frac{h \Delta\theta}{c} = \frac{\lambda}{c} = \frac{1}{v_0}$ , adică  $\Delta v = \frac{1}{\tau_c} \ll v_0$ , relație ce definește radiația monocromatică.

Deoarece mărimile  $U(\tau)$  și  $\phi(\tau)$  sunt lent-variabile față de unghiul  $\theta$ , în argument se poate considera  $\theta \cong \theta_0$ , deci:

$$(3.4.11) \quad \gamma_{12} = U \left[ \frac{h(\theta' - \theta_0)}{c} \right] \int_{-\infty}^{+\infty} i(\theta) \cos \left\{ \frac{\omega_0 h(\theta' - \theta)}{c} + \phi \left[ \frac{h(\theta' - \theta_0)}{c} \right] \right\} d\theta.$$

La nivelul ecranului se poate utiliza variabila  $(\theta' - \theta_0)$ , deci definim variabila:  $\tau = \frac{h(\theta' - \theta_0)}{c}$ , de unde:

$$(3.4.12) \quad \gamma_{12} = U(\tau) \int_{-\infty}^{+\infty} i(\theta) \cos \left[ \omega_0 \tau + \phi(\tau) - \frac{\omega_0 h(\theta - \theta_0)}{c} \right] d\theta.$$

Funcția  $i(\theta)$  este centrată la  $\theta = \theta_0$ , deci o putem redefini sub forma:  $i(\theta) \rightarrow i(\theta - \theta_0)$ , unde funcția  $i(\theta - \theta_0)$  este centrată  $\theta - \theta_0 = 0$ , prin urmare:

$$(3.4.13) \quad \gamma_{12} = U(\tau) \int_{-\infty}^{+\infty} i(\theta) \cos \left[ \omega_0 \tau + \phi(\tau) - \frac{\omega_0 h \theta}{c} \right] d\theta,$$

unde  $\tau$  și  $h$  sunt variabile independente.

### 3.4.3 Utilizarea transformatelor Fourier.

Dacă în relația (3.4 13), considerând  $u = \frac{v_0 h}{c}$ , se dezvoltă funcția  $\cos$ , se

obține:

$$\begin{aligned} \gamma_{12}(\tau, h) = & U(\tau) \cos[\omega_0 \tau + \phi(\tau)] \int_{-\infty}^{+\infty} i(\theta) \cos \frac{\omega h \theta}{c} d\theta + \\ & + U(\tau) \sin[\omega_0 \tau + \phi(\tau)] \int_{-\infty}^{+\infty} i(\theta) \sin \frac{\omega h \theta}{c} d\theta \end{aligned} \quad (3.4 14)$$

relație ce reprezintă transformata Fourier a funcției  $i(\theta)$ .

Să considerăm funcția sub forma:

$$\hat{i}(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} i(\theta) e^{-i2\pi u \theta} d\theta = \operatorname{Re} \hat{i}(u) + i \operatorname{Im} \hat{i}(u) = |\hat{i}(u)| e^{-i\psi(u)}$$

unde:

$$\operatorname{Re} \hat{i}(u) = |\hat{i}(u)| \cos \psi(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} i(\theta) \cos 2\pi u \theta d\theta,$$

$$\operatorname{Im} \hat{i}(u) = -|\hat{i}(u)| \sin \psi(u) = - \int_{-\infty}^{+\infty} i(\theta) \sin 2\pi u \theta d\theta.$$

În aceste condiții, relația (3.4 14) devine:

$$\begin{aligned} \gamma_{12}(\tau, h) = & U(\tau) |\hat{i}(u)| \times \\ & \times \{ \cos[\omega_0 \tau + \phi(\tau)] \cos \psi(u) + \sin[\omega_0 \tau + \phi(\tau)] \sin \psi(u) \} = \\ = & U(\tau) |\hat{i}(u)| \cos[\omega_0 \tau + \phi(\tau) - \psi(u)] = \operatorname{Re} \{ U(\tau) |\hat{i}(u)| e^{i[\omega_0 \tau + \phi(\tau) - \psi(u)]} \} = \\ = & \operatorname{Re} \{ U(\tau) e^{i[\omega_0 \tau + \phi(\tau)]} \hat{i}(u) \} \end{aligned} \quad (3.4 15)$$

Această mărime descrie gradul complex de coerență.

$$\gamma_{12}(\tau, h) = U(\tau) \hat{i}\left(\frac{v_0 h}{c}\right) e^{i[\omega_0 \tau + \phi(\tau)]} \quad (3.4 16)$$

Deoarece:  $\hat{i}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} i(\theta) e^0 d\theta = 1$ , se obține:

$$\tilde{\gamma}_{12}(\tau, 0) = \tilde{\gamma}_{12}(\tau) = U(\tau) e^{i[\omega_0 \tau + \phi(\tau)]}$$

Pe de altă parte, deoarece pentru  $\tau = 0$ ,  $U(0) = 1$  și  $\phi(0) = 0$  se obține:

$$\tilde{\gamma}_{12}(0, h) = \hat{i}\left(\frac{v_0 h}{c}\right) = \left| \hat{i}\left(\frac{v_0 h}{c}\right) \right| e^{-i\psi\left(\frac{v_0 h}{c}\right)} = \int_{-\infty}^{+\infty} i(\theta) e^{-i\frac{\omega_0 h \theta}{c}} d\theta.$$

Se poate scrie:

$$\tilde{\gamma}_{12}(\tau, h) = \tilde{\gamma}_{12}(\tau, 0) \tilde{\gamma}_{12}(0, h) = \tilde{\gamma}(\tau) \tilde{\gamma}_{12}(0, h). \quad (3.4 19)$$

Această relație descrie proprietățile reduse ale gradului complex de coerență. Funcția complexă  $\tilde{\gamma}(\tau)$  conduce la funcția de autocorelare prin intermediul relației  $\gamma(\tau) = \operatorname{Re} \tilde{\gamma}(\tau)$ . Dacă prezintă interes numai coerența spațială transversală, nu este necesară forma completă a mărimii  $\gamma(\tau)$ , ci numai valoarea acesteia pentru valori mici ale mărimii  $\tau$ , adică:

$$\gamma(\tau) \propto \cos \omega_0 \tau.$$

Vizibilitatea sau gradul de coerență. Pentru valori mici ale timpului de retardare  $|\tau|$ , se poate considera:  $U(\tau) \cong 1$  și  $\phi(\tau) \cong 0$ .

(3.4 20)

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}_{12}(\tau, h) = & \operatorname{Re} \left\{ U(\tau) e^{i[\omega_0 \tau + \phi(\tau)]} \hat{i}\left(\frac{v_0 h}{c}\right) \right\} \cong \operatorname{Re} \left\{ |\hat{i}(u)| e^{i[\omega_0 \tau - \psi(u)]} \right\} = \\ = & \left| \hat{i}\left(\frac{v_0 h}{c}\right) \right| \cos \left[ \omega_0 \tau - \psi\left(\frac{v_0 h}{c}\right) \right] \end{aligned}$$

Deci:  $\Phi = \Phi_{\text{tot}} (1 + \gamma_{12})$ , de unde:

$$\begin{aligned} \Phi_{\text{max}} = & \Phi_{\text{tot}} \left( 1 + \left| \hat{i}\left(\frac{v_0 h}{c}\right) \right| \right), \quad \cos \left[ \omega_0 \tau - \psi\left(\frac{v_0 h}{c}\right) \right] = +1 \\ \Phi_{\text{min}} = & \Phi_{\text{tot}} \left( 1 - \left| \hat{i}\left(\frac{v_0 h}{c}\right) \right| \right), \quad \cos \left[ \omega_0 \tau - \psi\left(\frac{v_0 h}{c}\right) \right] = -1. \end{aligned}$$

Vizibilitatea tabloului de interferență în jurul centrului  $\theta' = \theta_0$  este dată de relația:

$$V(h) = \frac{\Phi_{\text{max}} - \Phi_{\text{min}}}{\Phi_{\text{max}} + \Phi_{\text{min}}} = \left| \hat{i}\left(\frac{v_0 h}{c}\right) \right| = |\gamma_{12}(0, h)|, \quad (3.4 21)$$

reprezintă o măsură cantitativă a coerenței mutuale și se numește grad de coerență.

Dacă  $U(\tau) \neq 1$ , expresia vizibilității devine:



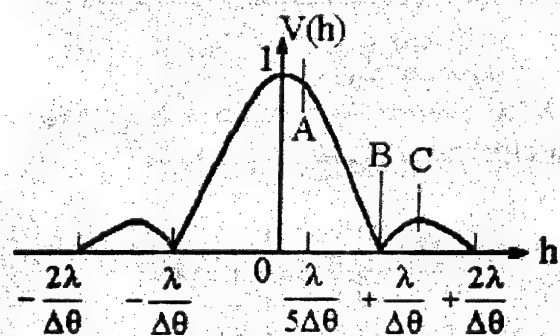
$$(3.4.22) \quad V(\tau, h) = U(\tau) \left| \hat{i} \left( \frac{v_0 h}{c} \right) \right| = U(\tau) \gamma_{12}(0, h) = U(\tau) V(h),$$

deoarece:

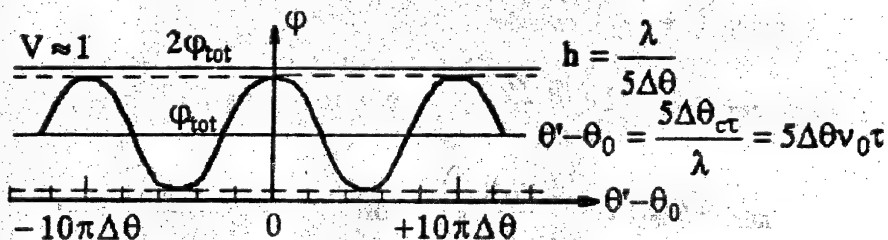
$$\gamma_{12}(\tau, h) = U(\tau) \left| \hat{i} \left( \frac{v_0 h}{c} \right) \right| \cos[\omega_0 \tau + \phi(\tau)]$$

$$\varphi_{\max} = \varphi_{\text{tot}} \left[ 1 + U(\tau) \left| \hat{i} \left( \frac{v_0 h}{c} \right) \right| \right], \text{ dacă: } \cos[\omega_0 \tau + \phi(\tau)] = +1$$

$$\varphi_{\min} = \varphi_{\text{tot}} \left[ 1 - U(\tau) \left| \hat{i} \left( \frac{v_0 h}{c} \right) \right| \right], \text{ dacă: } \cos[\omega_0 \tau + \phi(\tau)] = -1.$$



(a)

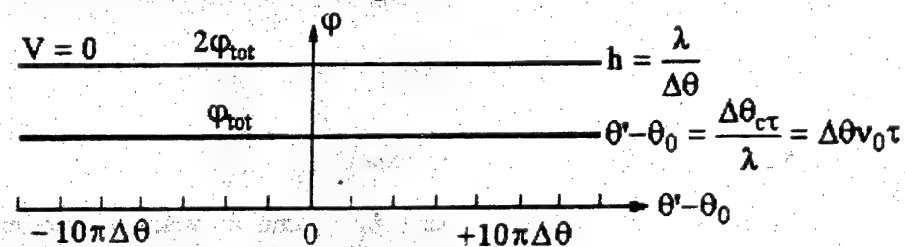


(b)

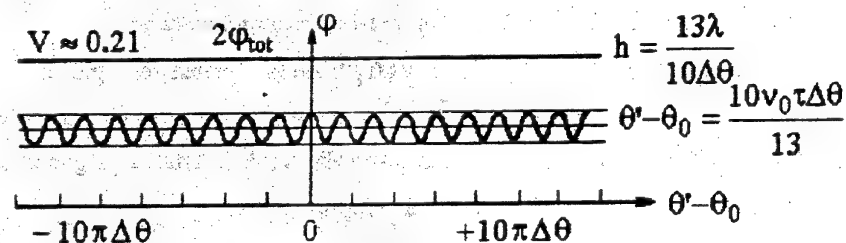
Fig. 21 a,b

Determinarea fazei mărimii  $\hat{i}$ . Dependența vizibilității tabloului de interferență  $V(h)$  de mărimea  $h$  permite calcularea valorii absolute a mărimii  $\left| \hat{i} \left( \frac{v_0 h}{c} \right) \right|$ . Faza unghiulară  $\psi \left( \frac{v_0 h}{c} \right)$  poate fi obținută din măsurători precise asupra densității de flux în tabloul de interferență, dacă valoarea timpului de întârziere  $\tau$  este aproape egală cu zero.

În fig. 21 a este prezentată variația vizibilității tabloului de interferență funcție de valoarea mărimii  $h$  dacă forma sursei de radiație este liniară caracterizată prin lățimea unghiulară  $\Delta\theta$ . În fig. 21 b,c,d este prezentată variația densității de flux pentru trei valori diferite ale mărimii  $h$  (punctele A, B și C din fig. 21 a).



(c)



(d)

Fig. 21 c,d

Conform relației:

$$\gamma_{12}(\tau, h) = \text{Re } \tilde{\gamma}_{12}(\tau, h) \propto \left| \hat{i} \left( \frac{v_0 h}{c} \right) \right| \cos \left[ \omega_0 \tau - \psi \left( \frac{v_0 h}{c} \right) \right],$$

franja de ordin zero cu maxim de intensitate, dacă  $\psi\left(\frac{v_0 h}{c}\right) \neq 0$ , va fi deplasată din

poziția:  $\tau = \frac{h(\theta' - \theta)}{c} = 0$  în poziția:

$$\tau = \frac{h(\theta' - \theta_0)}{c} = \frac{1}{\omega_0} \psi\left(\frac{v_0 h}{c}\right).$$

În acest mod se determină mărimea  $\psi\left(\frac{v_0 h}{c}\right)$  și se construiește funcția

$$\text{complexă: } \tilde{\gamma}_{12}(0, h) = i\left(\frac{v_0 h}{c}\right).$$

### 3.5 Lungimea de coerență transversală.

Să analizăm experimentul lui Young din punctul de vedere al corelării fluctuațiilor câmpului radiat de sursele  $S_1$  și  $S_2$ . Franje cu vizibilitate completă ( $V = 1$ ) se obțin numai dacă fluctuațiile prezintă o corelare bine definită, adică dacă radiația optică emisă de sursa  $S_1$ , respectiv  $S_2$  prezintă *coerență mutuală*.

În cazul surselor extinse am văzut că  $V(h)$  tinde la valoarea zero, prezentând câteva oscilații. Valorile mici ale mărimii  $V(h)$  corespund lipsei coerenței mutuale. De aceea se definește lungimea de coerență transversală  $l_t$ , deosebită de lungimea de coerență longitudinală  $l_l = c\tau_c$ , cu următoarele proprietăți:

- $h \gg l_t \rightarrow V(h) = 0$ , nu există coerență;
- $h \ll l_t \rightarrow V(h) = 1$ , există coerență;
- $h \approx l_t \rightarrow 0 < V(h) < 1$ , există coerență parțială.

Lungimea de coerență transversală este finită, deoarece radiația este emisă de către o distribuție de surse de formă finită. Chiar dacă am accepta că fasciculele de radiație emise de sursele individuale ar sosi în fază la  $S_1$ , din cauza distanțelor de propagare diferite, ele nu ar sosi în fază la  $S_2$ , în afara cazului când valoarea mărimii  $h$  ar fi mică. Pentru valori mici ale mărimii  $h$ , faza în punctul  $S_1$  este complet corelată cu cea din  $S_2$  (diferența de fază este bine definită).

Dacă  $h \cong l_t$ , atunci diferența de fază prezintă fluctuații medii în timp de ordinul  $\pm 1 \text{ rad}$ . (Aceste fluctuații apar în intervalul de timp  $\tau_c$  sec. Un detector al cărui timp de răspuns  $T$  este mult mai mic față de  $\tau_c$  va putea să înregistreze figura de interferență pe ecran, chiar dacă  $h \gg l_t$ , dar tabloul de interferență va fluctua în timp, adică în medie se va deplasa cu o jumătate de franjă în intervalul de timp  $\tau_c$ , prin urmare în timp lung nu se va observa tabloul de interferență. Pentru o sursă liniară sau un disc se poate considera că:  $l_t \cong h$ , deci se obține:  $l_t = \frac{\lambda}{\Delta\theta}$ .

*Funcția de corelare.* Câmpul electric în punctul P de pe ecran (fig. 19 a), la momentul  $t'$ , este proporțional cu valoarea câmpului electric  $e_1\left(t' - \frac{|S_1 P|}{c}\right)$  în punctul  $S_1$ , la momentul retardat cu  $\frac{|S_1 P|}{c}$ , și cu câmpul  $e_2\left(t' - \frac{|S_2 P|}{c}\right)$  în punctul

$S_2$ , la momentul retardat cu  $\frac{|S_2 P|}{c}$ :

$$(3.5.1) \quad e_P(t) \propto e_1\left(t' - \frac{|S_1 P|}{c}\right) + e_2\left(t' - \frac{|S_2 P|}{c}\right).$$

Notăm:  $\tau = \frac{|S_2 P| - |S_1 P|}{c} \cong \frac{h\theta'}{c}$ . Dacă se introduce variabila:  $t = t' - \frac{|S_1 P|}{c}$ .

momentul temporal în  $S_1$ , relația (3.5.1) devine:

$$(3.5.2) \quad e_P\left(t + \frac{|S_1 P|}{c}\right) = e_1(t) + e_2(t - \tau).$$

Densitatea spectrală de flux este proporțională cu  $\langle e_P^2 \rangle$ :

$$(3.5.3) \quad \begin{aligned} \langle e_P^2 \rangle &= \frac{1}{T} \int_{t_0 - \frac{T}{2}}^{t_0 + \frac{T}{2}} e_P(t)^2 dt = \langle [e_1(t) + e_2(t - \tau)]^2 \rangle = \\ &= \langle e_1(t)^2 \rangle + \langle e_2(t - \tau)^2 \rangle + 2\langle e_1(t)e_2(t - \tau) \rangle = \end{aligned}$$

$$= \langle e_1(t)^2 \rangle + \langle e_2(t-\tau)^2 \rangle + 2\sqrt{\langle e_1(t)^2 \rangle \langle e_2(t-\tau)^2 \rangle} \frac{\langle e_1(t)e_2(t-\tau) \rangle}{\sqrt{\langle e_1(t)^2 \rangle \langle e_2(t-\tau)^2 \rangle}} = \varphi_1 + \varphi_2 + 2\sqrt{\varphi_1\varphi_2}\gamma_{12}$$

unde:

$$(3.5.4) \quad \gamma_{12} = \frac{\langle e_1(t)e_2(t-\tau) \rangle}{\sqrt{\langle e_1(t)^2 \rangle \langle e_2(t-\tau)^2 \rangle}},$$

reprezintă funcția de corelare normalată, o mărime independentă de valorile relative ale elongațiilor  $e_1$  și  $e_2$ , dar care depinde de valoarea timpului de retardare ( $\tau$ ) și de valoarea distanței de separare a fantelor ( $h$ ). Dacă valoarea  $h \rightarrow 0$ , atunci  $e_2(t-\tau)$  devine egal cu o constantă înmulțit cu  $e_1(t-\tau)$ , deci:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \gamma_{12}(\tau, h) = \gamma(\tau) \text{ (funcția de autocorelare).}$$

Dacă  $\varphi_1 = \varphi_2$ , adică:  $\langle e_1^2 \rangle = \langle e_2^2 \rangle$ , se obține:  $\varphi = 2\varphi_1(1 + \gamma_{12})$ , unde:

$$\gamma_{12} = \frac{\langle e_1(t)e_2(t-\tau) \rangle}{\langle e_1(t)^2 \rangle}, \text{ este echivalent cu relația (3.4.9):}$$

$$\gamma_{12} = \int_{-\infty}^{+\infty} i(\theta) \gamma \left[ \frac{h(\theta' - \theta)}{c} \right] d\theta.$$

Dacă se consideră expresia semnalului analitic, se poate defini funcția de corelare complexă:

$$(3.5.5 \text{ a}) \quad \tilde{\Gamma}_{12} = \langle \tilde{e}_1(t) \tilde{e}_2^*(t-\tau) \rangle, \text{ respectiv: b) } \gamma_{12} = \frac{\langle \tilde{e}_1(t) \tilde{e}_2^*(t-\tau) \rangle}{\sqrt{\langle \tilde{e}_1(t)^2 \rangle \langle \tilde{e}_2(t-\tau)^2 \rangle}},$$

denumită grad de corelare complex, unde  $\gamma_{12}$  este partea reală a mărimii  $\tilde{\gamma}_{12}$ , iar  $|\tilde{\gamma}_{12}|$  - gradul de coerență, care este identic cu mărimea  $V$ . Mărimea  $|\tilde{\gamma}_{12}|$  reprezintă o măsură cantitativă a coerenței mutuale dintre câmpurile  $e_1$  și  $e_2$ . Dacă  $|\tilde{\gamma}_{12}| = 1$  coerența este completă iar termenul de interferență prezintă valoarea maximă; valoarea

$|\tilde{\gamma}_{12}| = 0$  evidențiază lipsa completă a coerenței, iar relația  $0 < |\tilde{\gamma}_{12}| < 1$  evidențiază coerența parțială.

*Evaluarea mărimii  $\gamma_{12}$  pentru o sursă extinsă.* Să considerăm o sursă extinsă, constituită dintr-un ansamblu de surse punctiforme distanțate una față de alta și care formează unghiurile  $\theta_j$  cu normala la planul celor două fante. Câmpurile la nivelul fantelor  $S_1$  și  $S_2$  sunt date de sume de forma:

$$e_1(t) = \sum_{j=1}^N e_{1j}(t) \text{ și } e_2(t-\tau) = \sum_{j=1}^N e_{2j}(t-\tau),$$

unde  $e_{2j}$  reprezintă câmpul instantaneu la nivelul fantei  $S_2$  generat de sursa  $j$ .

Funcția de corelație  $\gamma_{12}$ , conform relației (3.5.4) este:

$$\gamma_{12} = \frac{\langle e_1(t)e_2(t-\tau) \rangle}{\langle e_1(t)^2 \rangle}.$$

Dacă valoarea timpului de mediere este mare față de cea a timpului de coerență a radiației optice, deoarece în timpul unei măsurători diferența de fază se modifică cu mai mulți radiani, atunci valorile medii de forma:  $\langle e_{1j}(t)e_{2k}(t-\tau) \rangle$  sunt egale cu zero, exceptând cazul  $j = k$ . Rezultatul interferenței radiației de la sursa  $j$  se poate observa numai dacă aceasta interferează cu ea însăși, deci:

$$(3.5.6) \quad \gamma_{12} = \frac{\sum_j \langle e_{j1}(t)e_{j2}(t-\tau) \rangle}{\sum_j \langle e_{j1}(t)^2 \rangle}.$$

Radiația ce provine de la o sursă punctiformă la  $S_1$ , față de  $S_2$ , are un timp de propagare suplimentar  $\frac{h\theta}{c}$ , adică:

$$e_{1j}(t) = e_{2j}\left(t - \frac{h\theta_j}{c}\right) \text{ (la nivelul fantei), deci:}$$



$$(3.57) \quad \gamma_{12} = \frac{\sum_j \left\langle e_{2j} \left( t - \frac{h\theta_j}{c} \right) e_{2j}(t-\tau) \right\rangle}{\sum_j \left\langle e_{2j} \left( t - \frac{h\theta_j}{c} \right)^2 \right\rangle}$$

În această relație pentru intervale de timp de mediere mari, se obține o stare staționară pentru care fiecare proces de mediere este independent de momentul  $t_0$ . De aceea, în fiecare termen se poate înlocui variabila  $t$  cu  $t + ct$ , fără a modifica rezultatul. Înlocuind variabila  $t$  prin  $t + \frac{h\theta_j}{c}$ , se obține:

$$\gamma_{12} = \frac{\sum_j \left\langle e_{2j}(t) e_{2j} \left( t - \tau + \frac{h\theta_j}{c} \right) \right\rangle}{\sum_j \left\langle e_{2j}(t)^2 \right\rangle}$$

Deci, pentru o sursă  $j$ , funcția de autocorelare va fi:

$$\gamma_j(\tau) = \frac{\left\langle e_{2j}(t) e_{2j}(t-\tau) \right\rangle}{\sum_j \left\langle e_{2j}(t)^2 \right\rangle}$$

Dacă toate sursele elementare sunt caracterizate prin aceeași funcție de distribuție spectrală:  $\gamma_j(\tau) = \gamma(\tau)$ , atunci:

$$\gamma_{12} = \frac{\sum_j \left\langle e_{2j}(t) \right\rangle \gamma \left( \tau - \frac{h\theta_j}{c} \right)}{\sum_j \left\langle e_{2j}(t)^2 \right\rangle} \quad (\text{se înmulțește și se împarte cu } \left\langle e_{2j}(t)^2 \right\rangle).$$

Pentru diferite valori  $\gamma \left( \tau - \frac{h\theta_j}{c} \right)$ , această mărime reprezintă o medie ponderată cu factorul de ponderare:  $\frac{\left\langle e_{2j}(t)^2 \right\rangle}{\sum_j \left\langle e_{2j}(t)^2 \right\rangle}$ , care, dacă o fantă este închisă, descrie

densitatea de flux corespunzătoare fantei  $S_2$ .

Pentru o distribuție continuă se poate scrie:

$$\gamma_{12} = \int_{-\infty}^{+\infty} i(\theta) \gamma \left[ \tau - \frac{h\theta}{c} \right] d\theta,$$

care este identică cu relația (3.49):

$$\gamma_{12} = \int_{-\infty}^{+\infty} i(\theta) \gamma \left[ \tau - \frac{h(\theta' - \theta)}{c} \right] d\theta, \text{ deoarece: } \tau = \frac{h\theta'}{c}.$$

### 3.6 Intensitatea fluctuațiilor în spectroscopia interferențială.

Radiația de tip Gauss (termică) reprezintă suprapunerea semnalelor ce provin de la un număr foarte mare de surse independente. Pentru acest tip de radiație, amplitudinea instantanee și faza semnalului rezultat fluctuează datorită variațiilor întâmplătoare ale relațiilor de fază și ale amplitudinii semnalelor individuale. O variație mare a fazei semnalului rezultat este însoțită de o fluctuație mare a amplitudinii.

Comportarea fluctuațiilor amplitudinii conține informații despre fluctuațiile fazei sau, mai precis, despre corelarea de fază. Dacă radiația emisă de către două surse punctiforme  $S_1$  și  $S_2$  prezintă coerență mutuală spațială, atunci va exista o corelare pozitivă a mărimii fluctuațiilor. De ex. dacă există o fluctuație pozitivă față de valoarea medie generată de sursa  $S_1$ , atunci probabilitatea ca fluctuația să fie tot pozitivă la sursa  $S_2$  este mult mai mare față de probabilitatea ca să fie o fluctuație negativă și invers.

Acest efect se poate folosi pentru a măsura coerența spațială și temporală. În astronomie coerența spațială a radiației ce provine de la o sursă stelară depinde de dimensiunile sursei și forma ei. Tehnica corelării intensității fluctuațiilor este utilizată pentru măsurarea diametrului unghiular al stelelor.

#### 3.6.1 Interferometru cu corelarea intensității fluctuațiilor.

Detectorul de energie a radiației furnizează un semnal proporțional cu densitatea de flux incidentă, mediată pe un interval de timp  $T$ . Presupunem că pe întreaga arie a suprafeței sensibile a detectorului câmpul detectat prezintă coerență spațială completă. Dacă considerăm un timp de mediere al detectorului foarte scurt, atunci putem considera că detectorul indică valoarea instantanee  $I(t)$  a semnalului proporțională cu  $e(t)^2$ . Pentru început, presupunem că timpul de mediere  $T$  este mult mai mic față de timpul de coerență  $\tau_c$  al radiației ( $T \ll \tau_c$ ).

Dacă din semnalul detectat este eliminată componenta continuă (componenta medie) a semnalului la ieșire, care este proporțională cu valoarea  $\langle I(t) \rangle$  pe intervalul

lung de mediere, atunci va fi detectată numai componenta variabilă (cea care fluctuează), proporțională cu (fig. 22):

$$\delta I(t) = I(t) - \langle I(t) \rangle$$

În fig. 22, graficul (a) descrie așa numita intensitate instantanee  $\langle I(t) \rangle$  definită mai sus, graficul (b) descrie fluctuațiile instantanee  $\delta I(t)$ , iar graficul (c) descrie fluctuațiile netezite (mediate), centrate pe momentele  $t_0$  ale intensității.

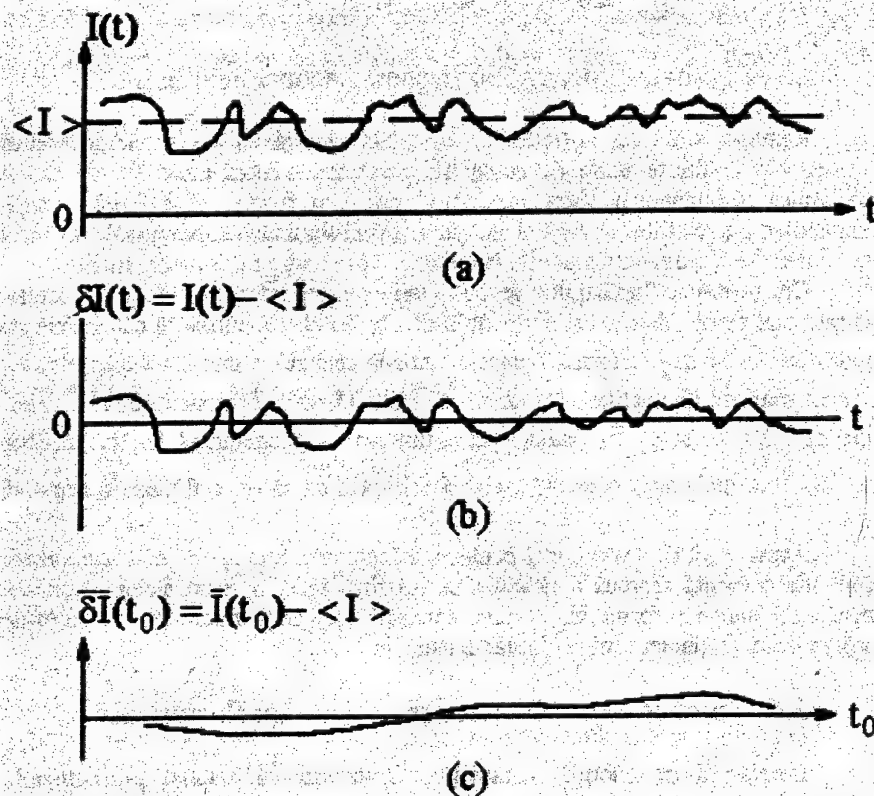


Fig. 22 a,b,c

În cazul experimentului Young, pentru a analiza coerența mutuală a câmpului em în punctele  $S_1$  și  $S_2$ , în planul acestora, s-a plasat un ecran cu două fante. În cazul de față, în cele două puncte se plasează doi detectori. Semnalul de la  $FM_2$ , față de  $FM_1$ , este întârziat cu intervalul de timp de retardare  $\tau$  trecându-l printr-o linie de întârziere variabilă (fig. 23). Semnalul rezultat, proporțional cu  $\delta I_1(t)$ , respectiv

$\delta I_2(t - \tau)$ , este introdus într-un corelator, un dispozitiv care realizează medierea pe timp lung a produsului celor două semnale, deci semnalul la ieșire este proporțional cu:

$$\langle \delta I_1(t) \delta I_2(t - \tau) \rangle$$

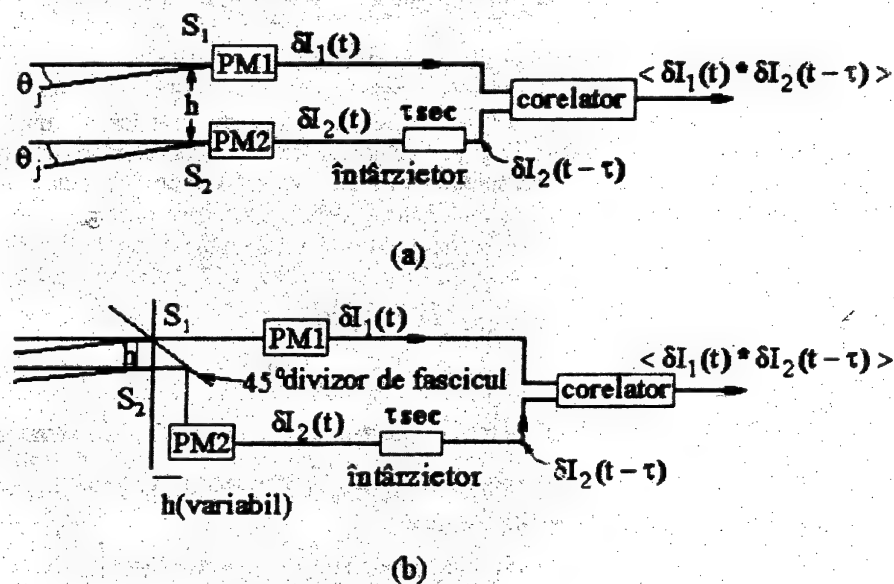


Fig. 23 a,b

Acest rezultat poate fi analizat funcție de variabilele independente: timpul de retardare  $\tau$  și distanța dintre fante  $h$ . Pentru  $h = 0$ , semnalul la ieșire va fi proporțional cu funcția de autocorelare  $\langle \delta I(t) \delta I(t - \tau) \rangle$  a intensității fluctuațiilor, deoarece:  $I_1(t) = I_2(t) = I(t)$ .

### 3.6.2 Expresia mărimii $\langle \delta I_1(t) \delta I_2(t - \tau) \rangle$

în cazul radiației termice monocromatice.

În acest caz, calculul funcției de corelare este destul de complicat. Semnalul se exprimă ca o suprapunere de semnale de la sursele independente constituente ale sursei și se calculează mărimea  $\delta I$ , respectiv funcția de corelare. Presupunând că toate sursele au aceeași funcție de distribuție spectrală se obține:

$$(3.6.1) \quad \langle \delta I_1(t) \delta I_2(t - \tau) \rangle = \langle I \rangle^2 |\tilde{\gamma}_{12}(\tau, h)|^2$$

Datorită proprietăților de reducere a gradului de coerență se poate scrie:

$$\tilde{\gamma}_{12}(\tau, h) = \tilde{\gamma}(\tau) \tilde{\gamma}_{12}(0, h), \text{ unde: } |\tilde{\gamma}_{12}(\tau, h)| = U(\tau) V(h)$$

prin urmare:

$$(3.6.2) \quad \langle \delta I_1(t) \delta I_2(t - \tau) \rangle = \langle I \rangle^2 U(\tau)^2 V(h)^2$$

Acest rezultat leagă corelarea intensității fluctuațiilor cu proprietățile de coerență.

### 3.6.3 Extinderea la valori mari ale timpului de mediere.

La obținerea relației de mai sus există o dificultate practică și anume imposibilitatea medierii instantanee asupra intensității, care a fost considerată mai sus. Circuitele electronice nu pot răspunde suficient de rapid. De aceea se produce o netezire dată de relația de mediere:

$$(3.6.3) \quad \bar{I}(t_0) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} I(t + t_0) dt,$$

unde  $I(t + t_0)$  reprezintă media instantanee utilizată mai sus. Deviația  $\delta \bar{I}$  a mărimii  $\bar{I}$  față de media acesteia pe un interval de timp lung  $\langle I \rangle$  este mult mai netedă: (fig. 22

c). Acesta reprezintă semnalul corelat de aparat:

$$\langle \delta \bar{I}_1(t_0) \delta \bar{I}_2(t_0 - \tau) \rangle = \langle \bar{I}_1(t_0) - \langle I \rangle \rangle \langle \bar{I}_2(t_0 - \tau) - \langle I \rangle \rangle,$$

unde medierea se face pe un interval de timp lung centrat pe  $t_0$ .

În acest caz relația (3.6.2) se înlocuiește cu expresia:

$$\frac{\langle \delta \bar{I}_1(t_0) \delta \bar{I}_2(t_0 - \tau) \rangle}{\langle I \rangle^2} = V(h)^2 \frac{\xi(T, \tau)}{T},$$

unde:

$$\xi(T, \tau) = \frac{1}{T} \int_{-T}^{+T} (T - |r|) [U(\tau + r)]^2 dr.$$

În situații reale, deoarece timpul de măsură  $T$  este cu mult mai mare față de timpul de coerență  $\tau_c$ , relației (3.6.2) îi corespunde:

$$(3.6.4) \quad \langle \delta \bar{I}_1(t_0) \delta \bar{I}_2(t_0 - \tau) \rangle = \langle I \rangle^2 V(h)^2 \frac{\tau_c}{T}, \text{ dacă } \tau < T, \text{ respectiv:}$$

$$\langle \delta \bar{I}_1(t_0) \delta \bar{I}_2(t_0 - \tau) \rangle = 0, \text{ dacă } \tau > T, \tau - \text{timp de întârziere.}$$

Această relație se menține, excepție făcând cazul:  $||\tau| - T| \cong \tau_c$ .

În această relație, micșorarea termenului cu factorul  $\frac{\tau_c}{T} \langle I \rangle$  face ca fluctuațiile netezite să fie mult mai dificil de observat față de cele instantanee. Aceasta rezultă și prin comparația graficelor (b) și (c) din fig. 22. Conform relației (3.6.4), se observă că se poate determina funcția:  $V(h) = \left| i \left( \frac{v_0 h}{c} \right) \right|$ , unde  $i(\theta) = \frac{I(\theta)}{I_{\text{tot}}}$  reprezintă funcția de distribuție unghiulară a intensității.

### 3.6.4 Experimente.

Corelarea intensității fluctuațiilor în fasciculele de radiație optică a fost demonstrată de către R. Hanbury Brown și R.Q. Twiss (1956) cu dispozitivul prezentat schematic în fig. 23 b. S-a utilizat radiația filtrată a unei lămpi cu Hg, valoarea timpului de coerență fiind  $\tau_c \cong 10^{-9}$  s, iar cea a timpului de integrare  $T \cong 40$  ns. Rezultatele obținute au verificat relația 3.6.4.

Această tehnică a fost aplicată și la un interferometru stelar, format din două oglinzi cu diametrul de 7 m, în care mărimea  $h$  s-a putut varia la valori de peste 25 m. Radiația optică de la o stea a fost înregistrată cu doi FM. La interferometrul stelar Michelson toleranțele dimensionale erau de ordinul  $\lambda$ , deci foarte precise. În acest caz imaginea nu este necesar să fie de bună calitate. Parametrii experimentului trebuie menținute în limitele valorii mărimii  $l_t$  sau  $cT$ . Eroarea asupra timpului este mult mai mică decât intervalul de mediere  $T$ .

### 3.6.5 Considerații cuantice.

În analiza precedentă a fost neglijată natura cuantică a radiației optice precum și natura proceselor utilizate pentru măsurarea intensității radiației optice. La nivelul detectorului energia radiației *em* sosește sub formă de cuante de energie a căror valoare este  $h\nu$ . Această structură determină fluctuații de intensitate și reprezintă o importantă sursă de zgomot.

*Numărătorul cuantic.* Să considerăm că drept numărător cuantic este folosit un detector fotoelectric (de ex. un FM) care poate număra fotoelectronii individuali. Presupunem că s-au înlăturat sursele de zgomot: curentul de întineric, zgomotul Johnson și efectul de "alice" din amplificator; singura sursă de zgomot (fluctuațiile curentului fotoelectric) este determinată de natura cuantică a procesului fotoelectric sau, ceea ce reprezintă același lucru, curentul electric reprezintă curgerea unor particule individuale încărcate.

Notăm cu  $I(t)$  fluxul mediat pe timp scurt care ajunge la detector, prin urmare în intervalul de timp  $dt$ , la detector ajunge cantitatea de energie  $I(t)$  sub formă de cuante de energie  $h\nu$ . Presupunem că fiecare cuantă poate extrage din catod



un electron, pe care-l presupunem că va fi detectat de către circuitul electronic cu o probabilitate egală cu unitatea. În FM fiecare fotoelectron va fi multiplicat la o sarcină de  $10^6$  electroni în câteva nanosecunde.

Introducem noțiunea de randament cuantic ( $\alpha$ ) - probabilitatea ca un foton să conducă la un fotoelectron. Atunci când energia  $I(t)$  este incidentă pe detector, numărul  $d n(t)$  de fotoelectroni emiși va fluctua din cauza naturii statistice a procesului fotoelectric. Valoarea "așteptată" (valoarea medie), calculată pe mai multe experimente și pe intervalul  $dt$  va fi:

$$(3.6.5) \quad d n(t) = \frac{\alpha I(t) dt}{h\nu}$$

Numărul mediu de fotoelectroni detectați de către detector în intervalul de timp  $T$  este:

$$[\bar{n}(t_0)] = \int_{t_0 - \frac{T}{2}}^{t_0 + \frac{T}{2}} d n(t') = \frac{\alpha}{h\nu} \int_{t_0 - \frac{T}{2}}^{t_0 + \frac{T}{2}} I(t') dt' = \frac{\alpha}{h\nu} T \bar{I}(t_0)$$

Pentru radiația termică, mărimea  $I \propto E^2$ , reprezintă o mărime variabilă aleatoare de tip Gauss. Cercetările detaliate ale statisticii fotonice au arătat că în acest caz nu este necesar să se facă deosebire între valoarea instantanee  $\bar{n}(t_0)$  față de valoarea medie  $[n(t_0)]$ . Fluctuațiile mărimumi  $\bar{n}(t_0)$  pot fi considerate ca fluctuații ale mărimumi  $\bar{I}(t_0)$ , deci se poate considera:

$$(3.6.6) \quad \bar{n}(t_0) = \frac{\alpha}{h\nu} T \bar{I}(t_0)$$

Medierea pe timp lung conduce la relația:

$$(3.6.7) \quad \langle n \rangle = \frac{\alpha}{h\nu} T \langle \bar{I} \rangle$$

Să considerăm indicațiile  $n_1$  și  $n_2$  din expresia anterioară date de cei doi FM. Fluctuațiile lor vor fi date de:

$$(3.6.8) \quad \delta \bar{n}_1(t_0) = \bar{n}_1(t_0) - \langle n \rangle = \frac{\alpha}{h\nu} T [I_1(t_0) - \langle I \rangle] = \frac{\alpha}{h\nu} T \delta \bar{I}_1(t_0)$$

$$\delta \bar{n}_2(t_0 - \tau) = \frac{\alpha}{h\nu} T \delta \bar{I}_2(t_0 - \tau)$$

Se poate calcula funcția de corelare a fluctuației numărului de electroni numărați:

$$\langle \delta \bar{n}_1(t_0) \delta \bar{n}_2(t_0 - \tau) \rangle = \left( \frac{\alpha T}{h\nu} \right)^2 \langle \delta \bar{I}_1(t_0) \delta \bar{I}_2(t_0 - \tau) \rangle =$$

(3.6.9)

$$= \left( \frac{\alpha T \langle I \rangle}{h\nu} \right)^2 V(h)^2 \frac{\xi(T, \tau)}{T}$$

Folosind relația (3.6.4), relația (3.6.9) devine:

(3.6.10)

$$\langle \delta n_1(t_0) \delta n_2(t_0 - \tau) \rangle = \left( \frac{\alpha T \langle I \rangle}{h\nu} \right)^2 V(h)^2 \frac{\xi(\bar{n}, \tau)}{T} = \langle n \rangle^2 V(h)^2 \frac{\xi(T, \tau)}{T}$$

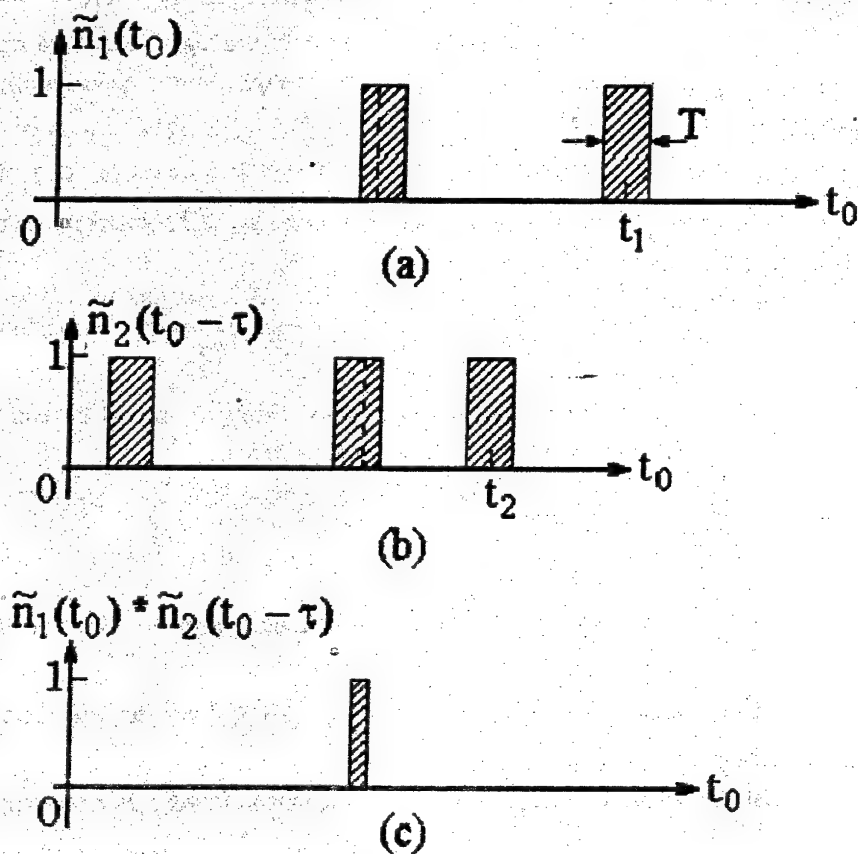


Fig. 24

Relați (3.6 10) arată că pentru valori  $h$  și  $\tau$  care conduc la o valoare  $V(h)^2 \xi(T, \tau) > 0$  există o corelare pozitivă între numărarea în exces la  $FM_1$  și cea de la  $FM_2$ , adică o numărare la  $FM_1$  este mai probabil să fie însoțită de o numărare la  $FM_2$ , decât s-ar aștepta pe baza șansei pure. Aceste numărări corelate se numesc *coincidențe*.

*Experimentul de coincidență.* Presupunem un interval de timp de măsură  $T$  suficient de scurt, astfel încât numărul mediu de numărări  $\langle n \rangle$  în intervalul  $T$  este cu mult mai mic față de unitate. În fig. 24 funcția  $\bar{n}_1(t_0)$  este reprezentată sub forma unui dreptunghi. Dacă un electron este emis la momentul  $t_1$ , atunci  $\bar{n}_1(t_0)$  este egal cu unitatea pe un interval de timp egal cu  $T$ , centrat pe momentul  $t_0 = t_1$ .

În aceste condiții, produsul  $\bar{n}_1(t_0)\bar{n}_2(t_0 - \tau)$  este egal cu unitatea atunci când ambii FM prezintă o numărare și zero în caz contrar. Această numărare dublă reprezintă o *coincidență*. Aceasta va apărea ori de câte ori  $|t_1 - t_2| \leq T$ , iar lățimea anvelopei pulsului în reprezentarea  $\bar{n}_1(t_0)\bar{n}_2(t_0 - \tau)$  funcție de  $t_0$  va fi  $T - |t_1 - t_2|$ , care variază de la zero la  $T$  și are o medie la  $T/2$ . Numărul mediu de coincidențe într-o secundă va fi:

$$(3.6 11) \quad R_c = \frac{\langle \bar{n}_1(t_0)\bar{n}_2(t_0 - \tau) \rangle}{T/2} = \frac{2\langle n \rangle^2}{T} \left[ 1 + V(h)^2 \frac{\xi(T, \tau)}{T} \right]$$

Dacă  $n_1$  și  $n_2$  prezintă valori pur întâmplătoare și nu sunt deloc corelate, atunci va exista numai o rată *accidentală de coincidențe* dată de:

$$(3.6 12) \quad R_a = \frac{2\langle n \rangle^2}{T} = 2T R_1^2,$$

unde  $R_1 = \frac{\langle n \rangle}{T}$  reprezintă rata medie de detecție a unui singur fotoelectron. Deci:

$R_c = R_a(1 + \eta)$ , unde  $\eta = V(h)^2 \frac{\xi(T, \tau)}{T}$ , iar  $(1 + \eta)$  reprezintă un factor de creștere rezultat din corelare.

Dacă se numără coincidențele în  $S$  secunde, numărul mediu de coincidențe va fi:

$$\bar{N}_a = S R_a = \frac{2S\langle n \rangle^2}{T} = 2ST R_1^2 \text{ - pentru coincidențe accidentale}$$

$$\bar{N}_c = S R_c = \bar{N}_a(1 + \eta) \text{ - pentru coincidențe corelate.}$$

Se pune problema preciziei determinării valorilor mărimilor  $N_a$ , respectiv  $N_c$ . Dacă considerăm coincidențele drept evenimente întâmplătoare necorelate, atunci deviația standard pentru o singură determinare a mărimii  $N_a$ , respectiv  $N_c$  este estimată a fi  $\sqrt{N_a}$ , respectiv  $\sqrt{N_c}$ . Dacă  $N$  nu este prea mic, atunci 67% din determinările individuale ale lui  $N$  sunt dispuse în intervalul  $N \pm \sqrt{N}$ , iar 95% în intervalul  $N \pm 2\sqrt{N}$ .

### 3.6.6 Considerații asupra zgomotului.

Pentru a măsura factorul  $\eta$  cu o oarecare certitudine, trebuie să avem o diferență  $\bar{N}_c - \bar{N}_a$  cu un ordin de mărime mai mare ca  $\sqrt{N_c}$ . Dacă  $N_a$  a fost determinat anterior cu o precizie mare, atunci eroarea  $N_c - N_a$  va fi aceea asupra lui  $N_c$  și anume  $\pm \sqrt{N_c}$ . Se poate scrie:

$$N_c - N_a = \bar{N}_a + \eta \bar{N}_a - \bar{N}_a \pm \sqrt{1 + \eta} \sqrt{N_a}$$

Raportul semnal/zgomot (SNR - signal-to-noise ratio) este definit ca valoarea medie a semnalului divizat la deviația standard:

$$(3.6 13) \quad \text{SNR} = \frac{\bar{N}_c - \bar{N}_a}{\sqrt{N_c}} = \frac{\eta \bar{N}_a}{\sqrt{1 + \eta} \sqrt{N_a}} = \frac{\eta}{\sqrt{1 + \eta}} \sqrt{N_a}.$$

Dacă se utilizează un detector lent, atunci  $\tau_c \ll T$ , iar:  $\eta = V(h)^2 \frac{\tau_c}{T} \ll 1$

(se poate neglija mărimea  $\eta$  față de valoarea 1), se obține:

$$(3.6 14) \quad \text{SNR} = V(h)^2 \sqrt{\frac{2S}{T}} (R_1 \tau_c)$$

Pentru radiația termică, produsul  $R_1 \tau_c \leq 10^{-2}$  (să considerăm, de ex.:

$R_1 \tau_c = 10^{-3}$ ). Dacă dorim:  $\text{SNR} = 10 = 10^2 \sqrt{\frac{2S}{10^{-8}}} 10^{-3}$ , se obține valoarea:

$S = 5000 \text{ sec}$ , care reprezintă o valoare tipică. Dar, dacă dorim  $\text{SNR} = 1$ , atunci  $S = 50 \text{ sec}$ .

Pentru un detector rapid:  $T \ll \tau_c$  avem:  $\eta = V(h)^2 U(\tau)^2$  și se obține:

$$(3.6.15) \quad \text{SNR} = \frac{[V(h)U(\tau)]^2}{\sqrt{1+[V(h)U(\tau)]^2}} \sqrt{\frac{2ST}{\tau_c^2}} (R_1 \tau_c).$$

Această incertitudine asupra rezultatului unei singure măsurători a lui  $N_c - N_a$  este determinată de natura cuantică a radiației optice și este cunoscută sub denumirea de "zgomotul împușcăturilor cu fotoni" (photon shot noise). Deoarece același proces cuantic intrinsec apare și în măsurătorile corelării fluctuațiilor de intensitate, unde fotoelectronii individuali nu sunt numărați în mod explicit, înseamnă că acest tip de zgomot este totdeauna prezent. Deoarece o măsurătoare a lui  $N_c - N_a$  este echivalentă cu o determinare mărimii  $\langle \delta \bar{I}_1(t') \delta \bar{I}_2(t' - t) \rangle$ , ultima va fi caracterizată totdeauna printr-un SNR dat de relația  $\frac{\eta}{\sqrt{1+\eta}} \sqrt{N_a}$ , unde  $S$  reprezintă valoarea intervalului de timp pentru determinarea mediei, iar  $T$  - intervalul de timp pentru determinarea mrimii  $I$ .

### 3.6.7 Parametrul de degenerare.

Intensitatea medie este dată de relația:  $\langle \bar{I} \rangle = E_{\text{incid.}} A$  unde  $E_{\text{incid.}}$  reprezintă densitatea de flux incidentă, iar  $A$  - aria suprafeței detectorului proiectată pe un plan perpendicular la fascicul sau, dacă există, aria sistemului de proiectie. Rata medie de detecție a unui singur fotoelectron se poate scrie sub forma:

$$(3.6.16) \quad R_1 = \frac{\langle n \rangle}{T} = \frac{1}{T} \frac{\alpha}{h\nu} T \langle \bar{I} \rangle = \frac{\alpha}{h\nu} E_{\text{incid.}} A, \quad \alpha - \text{randamentul cuantic.}$$

Dacă sursa văzută din detector subîntinde un unghi  $\Delta\Omega$  și are o radianță totală  $L_e$  pentru radiația emisă în direcția detectorului, atunci:  $E = L_e \Delta\Omega$ . Mărimea  $\Delta\Omega$  se poate exprima la detector prin intermediul așa numitei "arie de coerență"  $A_c$ , prin

relația:  $A_c = \frac{\lambda^2}{\Delta\Omega}$ . Această relație reprezintă o generalizare bidimensională a noțiunii

de lungime de coerență  $l_t = \frac{\lambda}{\Delta\theta}$ , caracteristică unei surse cu lărgimea unghiulară

$\Delta\theta$ . În interiorul ariei de coerență există o corelare bine definită între câmpurile electrice în două puncte ale acesteia.

Deci:

$$(3.6.17) \quad R_1 \tau_c = \frac{\alpha}{h\nu} L_e \tau_c \lambda^2 \frac{A}{A_c} = \alpha \delta \frac{A}{A_c},$$

unde  $\delta = \frac{L_e}{h\nu} \tau_c \lambda^2$  reprezintă parametrul de degenerare.

Deoarece  $L_e$  reprezintă raportul energiei radiante emisă de sursă în unitatea de timp, pe unitatea de arie și pe unitatea de unghi solid, mărimea  $\delta$  poate fi interpretată ca numărul mediu de fotoni (cu o polarizare bine determinată) emiși în unitatea de unghi solid în direcția detectorului de la suprafața sursei de arie egală cu  $\lambda^2$  în intervalul de timp egal cu timpul de coerență  $\tau_c$ . Deoarece  $\lambda^2 = \Delta\Omega A_c$ , mărimea  $\delta$  se poate interpreta ca numărul de fotoni mediu care sosesc la detector pe o suprafață de arie  $A_c$  de la toată sursa în intervalul de timp  $\tau_c$ , sau ca numărul de fotoni care la orice moment dat umplu "volumul de coerență"  $V_c = A_c \tau_c c$ . Pentru radiația monocromatică de echilibru termic la temperatura  $T$ , parametrul de degenerare este dat de relația lui Planck:

$$\delta = \frac{1}{e^{kT} - 1} = \frac{1}{e^{\frac{hc}{kT}} - 1} \ll 1,$$

iar pentru radiația laser:  $\delta \approx 10^{12}$ .

## 4. Starea de polarizare a radiației optice.

Într-un mediu izotrop și omogen, câmpul  $em$  poate fi descris ca o suprapunere a undelor plane ale câmpului componente electrice, respectiv magnetice, ale căror direcții de acțiune sunt reciproc perpendiculare, iar ambele sunt perpendiculare la direcția de propagare. La analiza câmpului  $em$  se urmărește numai comportarea componentei electrice  $e(r, t)$ , deoarece comportarea componentei magnetice se obține din cea electrică prin intermediul ecuațiilor Maxwell.

### 4.1 Modele elementare ale radiației polarizate.

Deoarece câmpul electric este reprezentat printr-o mărime vectorială, trebuie specificată atât mărimea cât și direcția acestuia. Particularitățile determinate de direcția de acțiune sunt descrise de caracteristicile de polarizare ale câmpului. Dacă considerăm o undă plană caracterizată prin vectorul de undă  $k$ , într-un plan perpendicular la direcția  $k$  câmpul electric poate prezenta orice direcție, iar mărimea  $b$  acționează de-a



lungul vectorului  $\mathbf{k} \times \mathbf{e}$ . Dacă vectorul:  $\mathbf{k} = \frac{2\pi n}{\lambda_0} \mathbf{k}_0 = \frac{\omega n}{c} \mathbf{k}_0$  este orientat de-a

lungul axei  $z$  (în continuare se va considera  $k_z = k$ ) și se consideră un plan  $(x, y)$  perpendicular la această direcție, atunci expresia câmpului armonic este:

$$(4.1) \quad \mathbf{e}(x, y, z, t) = \text{Re}[\tilde{\mathbf{E}} e^{i(\omega t - k z)}]$$

$\tilde{\mathbf{E}} = (\tilde{E}_x, \tilde{E}_y, 0)$  reprezintă un vector de mărime constantă dispus în planul  $(x, y)$ ,

unde  $\tilde{E}_x = E_x e^{i\phi_x}$  și  $\tilde{E}_y = E_y e^{i\phi_y}$  pot fi mărimi complexe, iar  $E_x, E_y, \phi_x$  și  $\phi_y$  sunt mărimi pozitive.

În acest caz componentele reale ale câmpului electric, sunt:

$$e_x(x, y, z, t) = E_x \cos(\omega t - k z + \phi_x);$$

$$e_y(x, y, z, t) = E_y \cos(\omega t - k z + \phi_y);$$

$$e_z(x, y, z, t) = 0$$

**Tipuri de radiație polarizată.** Dacă pe direcția de propagare definită de vectorul  $\mathbf{k}$ , în planul  $(x, y)$  perpendicular în punctul  $z$  la această direcție, acționează două câmpuri electrice  $(e_x, e_y)$ , acestea interferează. Se va considera că cele două componente sunt reciproc perpendiculare. Elongafia vectorului rezultat variază în timp cu pulsația  $\omega$ , în timp ce orientarea și mărimea amplitudinii depinde de valoarea fazei relative  $\phi = \phi_y - \phi_x$ , precum și de valoarea raportului  $\frac{E_y}{E_x}$ . Pentru a descrie

aspectul vectorial al componentei electrice a câmpului *em* se introduc niște modele care sunt prezentate în continuare.

**Radiație polarizată eliptic, axele principale ale elipsei fiind diferite de axele de bază  $(x, y)$**  apare atunci când diferența de fază dintre cele două componente este:

$$\phi \neq 0, \frac{\pi}{2}, \pm\pi.$$

Dacă se consideră  $\phi_y = \phi_x + \phi$  și  $\theta = \omega t - k z$  se obține:

$$(4.2) \quad e_x(x, y, z, t) = E_x \cos(\theta + \phi_x), \quad e_y(x, y, z, t) = E_x \cos(\theta + \phi_y).$$

Aceste relații pot descrie câmpul electric  $\mathbf{e}(x, y, z, t)$  ca suprapunerea a două câmpuri polarizate liniar. Mărimea și direcția de acțiune a vectorului rezultat evoluează periodic în timp. Vectorul rezultat este dispus în planul  $(x, y)$ , iar vârful acestuia, într-o

perioadă, descrie o elipsă. Elipsa este înscrisă în interiorul unui dreptunghi cu laturile  $2E_x$  și  $2E_y$ . Excentricitatea elipsei depinde de diferența de fază  $\phi = \phi_y - \phi_x$ ,

având valoarea minimă pentru  $\phi = \pm \frac{\pi}{2}$ , iar cea maximă pentru:  $\phi = \pm\pi$ . (fig. 25).

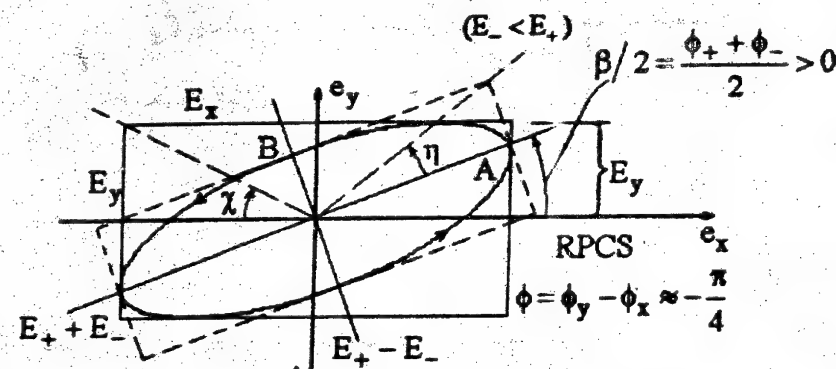


Fig. 25

Dacă se utilizează versori  $\hat{i}$ , respectiv  $\hat{j}$  drept baze de polarizare liniară, atunci se poate scrie:

$$(4.3) \quad \mathbf{e} = e_x \hat{i} + e_y \hat{j}.$$

Acest caz general prezintă o serie de cazuri particulare.

**Radiația polarizată-liniar** se obține dacă  $\phi = 0$  sau  $\phi = \pi$ . Dacă  $\phi = 0$ ,

atunci componenta  $e_y$  este proporțională cu  $e_x$ , adică:  $e_y = \frac{E_y}{E_x} e_x$ , iar dacă

$$\phi = \pi \text{ atunci } e_y = -\frac{E_y}{E_x} e_x.$$

Pentru o poziție dată  $z$ , câmpul electric efectuează o mișcare armonică în timp, iar pentru un moment dat  $t$ , câmpul prezintă o dependență sinusoidală de  $z$ , fiind dispus în planul format de axa  $z$  și dreapta:  $y = \frac{E_y}{E_x} x$  (oscilații în cadranul

$1 \leftrightarrow 3$ ), respectiv  $y = -\frac{E_y}{E_x} x$  (oscilații în cadranul  $2 \leftrightarrow 4$ ) (fig. 26 a,b).

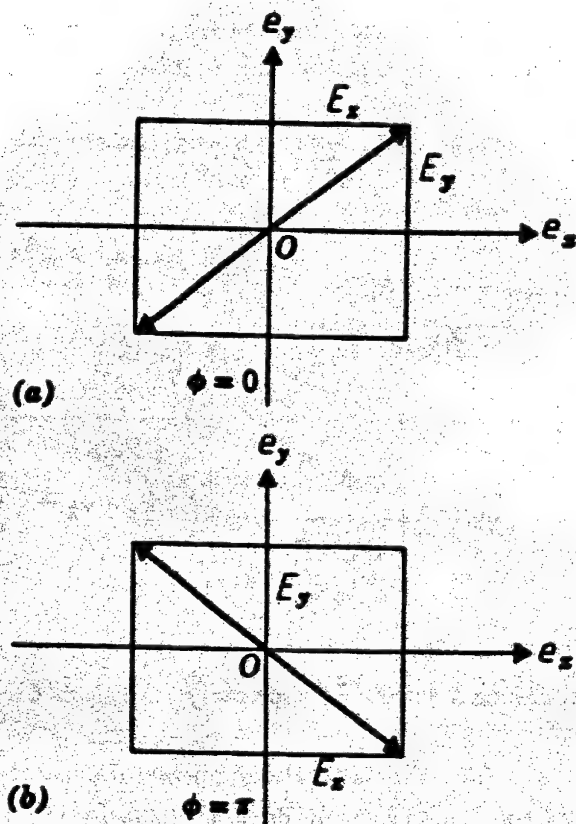


Fig. 26 a,b

Radiație polarizată eliptic, axele principale ale elipsei coincid cu axele de bază  $(x, y)$ . Dacă  $E_x \neq E_y$ , dar  $\phi = \pm \frac{\pi}{2}$ , atunci, în planul  $(x, y)$ , deplasarea vârfului vectorului rezultat va descrie o elipsă. Componentele de bază sunt:

$$(4.4 a) \quad e_x(x, y, z, t) = E_x \cos(\omega t - k z + \phi_x),$$

$$(4.4 b) \quad e_y(x, y, z, t) = \pm E_y \sin(\omega t - k z + \phi_x),$$

care conduc la:

$$\frac{e_x^2}{E_x^2} + \frac{e_y^2}{E_y^2} = \cos^2(\omega t - k z + \phi_x) + \sin^2(\omega t - k z + \phi_x) = 1.$$

Semiaxe elipsei sunt determinate de mărimile  $E_x$  și  $E_y$ , fiind orientate de-a lungul direcției  $x$ , respectiv  $y$ , adică se obține radiație polarizată eliptic, axele principale ale

elipsei fiind chiar axele principale  $(x, y)$ . În fig. 27 este prezentat, într-un plan  $(x, y)$  perpendicular la direcția de propagare a câmpului  $em$ , locul geometric al extremității vectorului câmp electric în cazul a trei diferențe de fază.

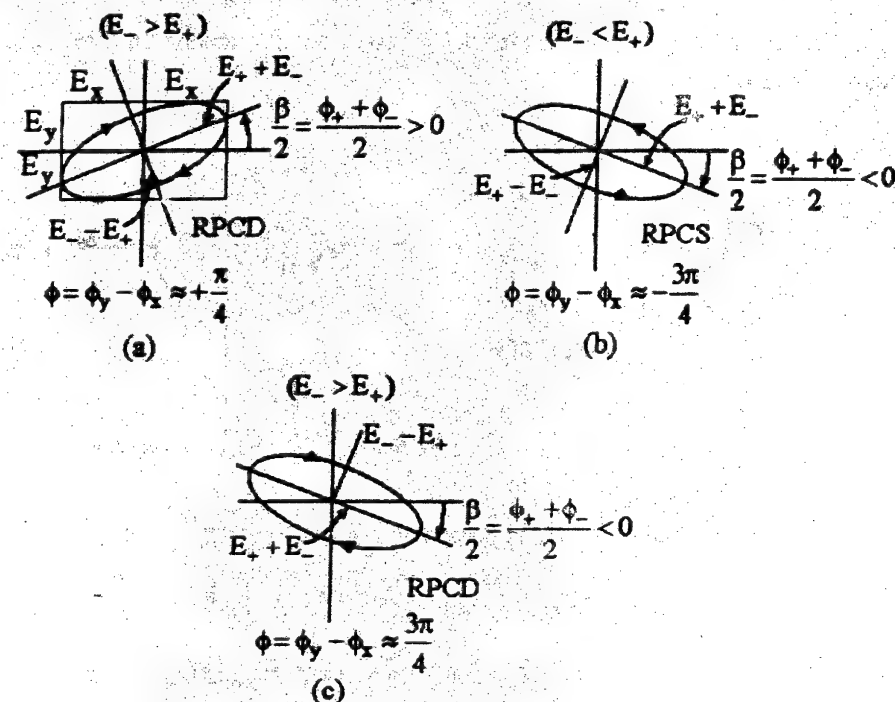


Fig. 27

Dacă:  $E_x = E_y$  și  $\phi = \phi_y - \phi_x = \pm \frac{\pi}{2}$ , expresia componentelor este:

$$(4.4 a') \quad e_x(x, y, z, t) = E_x \cos(\omega t - k z + \phi_x),$$

$$(4.4 b')$$

$$e_y(x, y, z, t) = E_x \cos\left(\omega t - k z + \phi_x \pm \frac{\pi}{2}\right) = \mp E_x \sin(\omega t - k z + \phi_x).$$

Dacă:  $\phi = +\frac{\pi}{2}$ , elongația  $e_y$  este defazată față de  $e_x$  cu  $\pi/2$ , adică  $e_y$

atinge valoarea maximă cu un sfert de cerc înaintea lui  $e_x$ . În planul  $(x, y)$ , extremitatea vectorului câmp electric descrie un cerc în sensul acelor de ceasornic, adică

câmpul electric prezintă "elicitate negativă", ceea ce în optică este cunoscut sub denumirea de *radiație polarizată circular-dreapta* (RPCD).

Dacă:  $\phi = -\frac{\pi}{2}$ , atunci "elicitatea este pozitivă" (RPCS) -  $e_y$  întârzie față de

$e_x$  cu un sfert de cerc iar câmpul electric, în planul  $(x, y)$ , descrie un cerc contrar acelor de ceasornic (fig. 28 a).

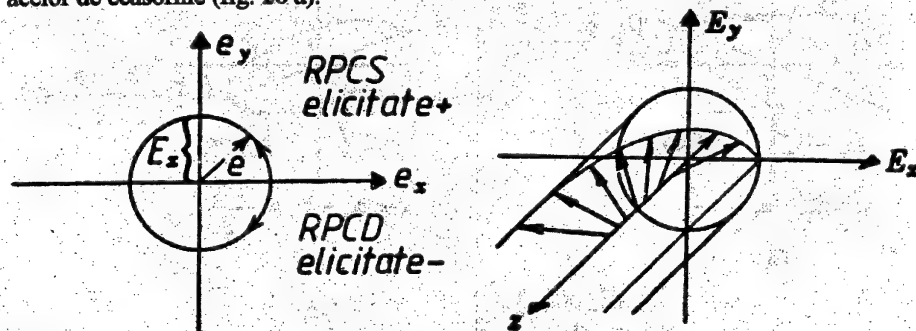


Fig. 28 a, b

Radiație polarizată circular se poate obține și dacă:  $\phi = \pm \frac{3\pi}{2}$ , adică:

$$e_x(x, y, z, t) = E_x \cos(\omega t - k z + \phi_x)$$

$$e_y(x, y, z, t) = E_x \cos\left(\omega t - k z + \phi_x \pm \frac{3\pi}{2}\right) = \pm E_x \sin(\omega t - k z + \phi_x).$$

Pentru o valoare fixă a mărimii  $t$ , vârful vectorului câmp electric descrie o spirală pe suprafața unui cilindru circular de rază  $E_x$ , a cărui axă este dispusă de-a lungul direcției  $z$ . Deoarece o creștere a parametrului  $z$  este echivalent cu micșorarea fazei:  $(\omega t - k z + \phi_x)$ , vârful vectorului câmp electric al radiației polarizate circular-dreapta, de-a lungul axei  $z$ , va descrie o spirală contrar acelor de ceasornic, iar pentru un moment  $t$  fix va apare ca un șurub "pe dreapta".

#### 4.2 Radiația polarizată eliptic reprezentată ca o suprapunere de componente polarizate circular.

Câmpul  $e_m$  descris de mărimile  $e_x$  și  $e_y$  este mai comod să fie exprimat ca o suprapunere de componente polarizate circular-dreapta, respectiv -stânga, decât ca o suprapunere a două componente polarizate liniar de-a lungul axelor  $x$  și  $y$ . Pentru a descrie componentele polarizate circular se poate utiliza notația complexă.

Componentele  $(x, y)$  ale radiației polarizată circular-stânga, elicitate  $(+)$ , sunt:

$$(4.5 a) \quad e_x = E_+ \cos(\theta + \phi_+) = \text{Re}(E_+ e^{i\phi_+} e^{i\theta}), \text{ unde: } E_+ > 0 \text{ și } \phi_+ = \text{ct.}$$

$$(4.5 b) \quad e_y = E_+ \sin(\theta + \phi_+) = \text{Im}(E_+ e^{i\phi_+} e^{i\theta}),$$

iar expresia radiației polarizată circular-stânga este:

$$(4.6 a) \quad \tilde{e} = e_x + i e_y = E_+ e^{i\phi_+} e^{i\theta}.$$

Pentru radiația polarizată circular-dreapta, elicitate  $(-)$ , se poate scrie:

$$e_x = E_- \cos(\theta - \phi_-) = \text{Re}(E_- e^{i\phi_-} e^{-i\theta})$$

$$e_y = -E_- \sin(\theta - \phi_-) = \text{Im}(E_- e^{i\phi_-} e^{-i\theta})$$

sau:

$$(4.6 b) \quad \tilde{e} = e_x + i e_y = E_- e^{i\phi_-} e^{-i\theta}.$$

Compunerea radiației cu elicitate pozitivă, respectiv negativă conduce la relația:

$$(4.7) \quad \tilde{e} = E_+ e^{i\phi_+} e^{i\theta} + E_- e^{i\phi_-} e^{-i\theta} = a_+ e^{i\theta} + a_- e^{-i\theta},$$

unde:  $a_+$  și  $a_-$  sunt coeficienți complecși. Diagrama fazorială pentru acest caz este prezentată în fig. 29.

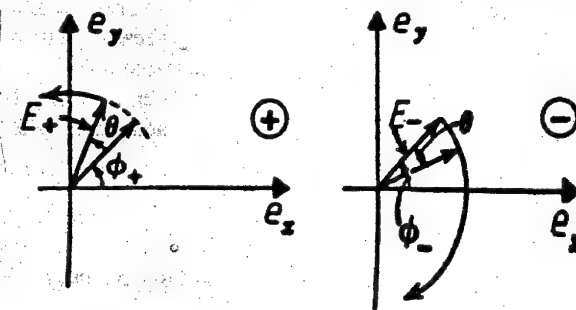


Fig. 29

Pe această bază se obțin relațiile:



$$\begin{aligned}
e_x &= E_x \cos(\theta + \phi_x) = \frac{1}{2} E_x e^{i\phi_x} e^{i\theta} + \frac{1}{2} E_x e^{-i\phi_x} e^{-i\theta} = \\
&= \frac{1}{2} a_x e^{i\theta} + \frac{1}{2} a_x^* e^{-i\theta} \\
e_y &= E_y \cos(\theta + \phi_y) = \frac{1}{2} E_y e^{i\phi_y} e^{i\theta} + \frac{1}{2} E_y e^{-i\phi_y} e^{-i\theta} = \\
&= \frac{1}{2} a_y e^{i\theta} + \frac{1}{2} a_y^* e^{-i\theta}
\end{aligned}$$

Prin urmare:

$$(4.8) \quad \tilde{e} = e_x + i e_y = \frac{1}{2} (a_x + i a_y) e^{i\theta} + \frac{1}{2} (a_x^* + i a_y^*) e^{-i\theta},$$

iar prin identificare cu relația (4.7) se obține:

$$(4.9a) \quad a_+ = \frac{1}{2} (a_x + i a_y) \text{ și } a_- = \frac{1}{2} (a_x^* + i a_y^*).$$

Dacă se consideră expresia complex-conjugată:  $a_-^* = \frac{1}{2} (a_x - i a_y)$ , atunci:

$$(4.9b) \quad a_x = a_+ + a_-^* \text{ și } a_y = -i(a_+ - a_-^*).$$

Relațiile (4.9 a,b) exprimă legătura dintre coeficienții  $a_+$ ,  $a_-$  și  $a_x$ ,  $a_y$ .

Avantajul utilizării relației (4.7) în loc de relația (4.3) constă în interpretarea mai ușoară a caracteristicilor câmpului *em* atunci când se utilizează drept componente de bază componentele polarizate circular în loc de cele polarizate liniar.

Fasciculele polarizate circular pot fi caracterizate printr-un moment cinetic propriu sau spin. Componenta  $Z$  a momentului cinetic raportată la unitate de volum este:

$$L_z = \pm \frac{w}{\omega},$$

unde semnele ( $\pm$ ) marchează elicitatea,  $w$  – densitatea de energie *em*, iar  $\omega$  – pulsația câmpului.

### 4.3 Radiația nepolarizată.

Radiația nepolarizată nu reprezintă o stare elementară de polarizare. Pentru a analiza această problemă este necesar să descriem, din punct de vedere clasic, structura câmpului *em* emis de către un ansamblu de sisteme emițătoare elementare.

*Radiația termică.* Sursele de radiație optică reprezintă un ansamblu format dintr-un număr foarte mare de sisteme cuantice care pot interacționa între ele, mărimea

interacțiunii fiind determinată de distanța dintre sisteme. Interacțiunile cele mai slabe se manifestă în cazul stării gazoase. De aceea, vom considera un ansamblu constituit din cele mai simple sisteme cuantice - atomii - aflat în stare gazoasă.

Sistemele cuantice, prin doua mecanisme mai importante: ciocniri *neelastice* cu alte particule, respectiv acțiunea unui câmp *em* extern, pot primi din exterior o cantitate de energie, cunoscută sub denumirea de energie de excitare, care determină creșterea energiei interne proprii. Acestea redau mediului extern energia de excitare prin emisie spontană sau prin procese neradiative, sau, dacă procesul are loc sub acțiunea unui câmp *em* extern, prin emisie stimulată.

Să considerăm că ansamblul dispune de energie termică, iar transformarea energiei cinetice de agitație termică a atomilor în energie de excitare se realizează prin procesul de ciocniri *neelastice*, care este un proces aleatoriu, deci se supune legilor statistice. Ca rezultat, în sistemul cuantic se induce un moment de dipol. Valoarea acestuia este determinată de cantitatea de energie cinetică primită în urma ciocnirii, iar orientarea spațială depinde de direcția după care are loc ciocnirea.

Dipolii, prin emisie spontană, emit câmpuri *em* optice finite în timp și spațiu, caracterizate printr-o singură frecvență de bază  $\nu_0$  și un factor de amortizare  $\gamma_0$ . Aceste câmpuri se propagă, fiind localizate între două suprafețe sferice centrate în emițător, care expandează în spațiul-vid cu viteza  $c$ . Câmpul electric emis de către dipolul electric liber (neperturbat de cauze externe) reprezintă o undă amortizată, cu durată  $\tau_0 \cong 10^{-8}$  sec, căreia îi corespunde o lățime a structurii spectrale egală cu  $\Delta\nu \cong 10^8$  Hz. În acest interval de timp, câmpul electric efectuează  $\nu_0 \tau_0 \cong 10^7$  oscilații complete, amplitudinea acestora micșorându-se în timp după o lege exponențială. Lungimea asociată acestei unde amortizate este:  $\Delta L \cong c \tau_0 = 3$  m.

În timpul procesului de emisie, dipolul este perturbat prin ciocniri atât elastice cât și *neelastice* cu alți dipoli ai ansamblului. Ca rezultat, se modifică mărimea momentului de dipol ( $p_0$ ), direcția acestuia, precum și faza oscilației față de faza anterioară ciocnirii. În acest mod, procesul de emisie al dipolului este fragmentat, durată fiecărui fragment corespunde intervalului de timp dintre două ciocniri. Acesta este o mărime aleatoare, fiind determinată de mărimea drumului liber al sistemelor. Valoarea amplitudinii semnalului va depinde de valoarea amplitudinii momentului de dipol ( $p_0$ ) și de mărimea unghiului  $\theta$  dintre direcția momentului de dipol și direcția de observație, mărimi care variază în mod aleator, deoarece valoarea lor este determinată de procesele de ciocniri dintre dipoli. Dacă  $\tau_0 \cong 10^{-11}$  s, atunci lungimea medie a semnalului este:  $\Delta L \cong c \tau_0 = 3$  cm. Prin urmare, într-un punct al spațiului prin care trece acest grup de unde, acțiunea lui durează  $10^{-11}$  s, iar componenta electrică efectuează  $10^4$  oscilații complete.

Să considerăm un volum  $\Delta V$  foarte mic ocupat de ansamblul de sisteme atomice (dipoli electrici) care formează sursa de radiație (aprox. de dipol electric) și un

sistem de coordonate cu originea localizată în acest volum (fig. 30). Să determinăm acțiunea componentei electrice într-un punct  $M(\mathbf{R})$ , situat la distanță mare față de dimensiunile volumului ocupat de ansamblu. În acest punct considerăm un plan  $(xy)$ , perpendicular la direcția vectorului  $\mathbf{R}$ . Deoarece distanța  $R$  este mare față de dimensiunile ansamblului, direcțiile vectorilor intensitate câmp electric, create de dipolii ansamblului, pot fi considerate coplanare cu planul  $(xy)$  (unghiurile  $\beta_m$  formate de vectorii  $\mathbf{R}_m$  cu vectorul  $\mathbf{R}$  sunt foarte mici).

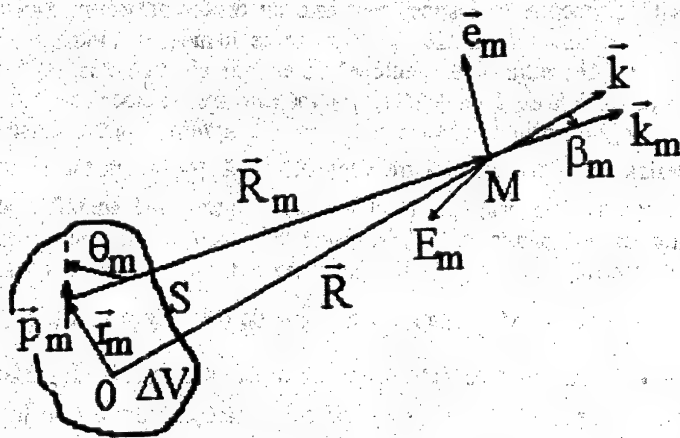


Fig. 30

Dacă  $\hat{i}$  și  $\hat{j}$  reprezintă versorii direcțiilor  $Mx$  și  $My$ , iar  $\alpha_m$  unghiul format de direcția de acțiune a câmpului electric creat de dipolul  $m$  cu direcția  $Mx$ , atunci intensitatea  $e_m$  a câmpului electric al unui semnal individual poate fi scrisă sub forma:

$$e_m = e_{mx} \hat{i} + e_{my} \hat{j} = (e_m \cos \alpha_m) \hat{i} + (e_m \sin \alpha_m) \hat{j},$$

unde  $e_m$  este dat de relația (I 4.10).

La un moment dat, în punctul  $M(\mathbf{R})$  acționează  $N$  semnale emise de către dipolii electrice ai ansamblului, deci componentele intensității câmpului electric total vor fi:

$$(4.10) \quad e_x(\mathbf{R}, t) = \sum_{m=1}^N e_{mx} \text{ și } e_y(\mathbf{R}, t) = \sum_{m=1}^N e_{my}.$$

Mărimile  $e_x(\mathbf{R}, t)$  și  $e_y(\mathbf{R}, t)$ , odată cu scurgerea timpului, prezintă, una față de alta, valori aleatoare independente. Această comportare este determinată de valorile

aleatoare ale mărimilor  $p_m$ ,  $\theta_m$ ,  $r_m$  și  $\varphi_m$ , iar independența lor este determinată de faptul că unghiul  $\alpha_m$  prezintă valori aleatoare în timp.

La calculul câmpului electric rezultat din suprapunerea câmpurilor individuale fragmentate trebuie analizată atât mărimea cât și direcția de acțiune a acestuia. La un moment dat, într-un punct dat al spațiului, se compun un număr foarte mare de câmpuri individuale fragmentate.

1. *Direcția de acțiune* a câmpului rezultat este determinată de direcția de acțiune a câmpului semnalelor individuale, care sunt polarizate liniar, precum și de faza acestora. Direcția de acțiune individuală este determinată de orientarea momentului de dipol în timpul procesului de emisie, iar faza este determinată de procesul de ciocniri.

Orientarea spațială a momentului de dipol este fixată de structura unității de volum a sursei emițătoare. Dacă sursa de radiație prezintă o structură cristalină, atunci direcția dipolilor electrice în sursă este fixă ceea ce determină o orientare fixă a direcției de acțiune a câmpurilor în fragmentele individuale, care conduce la o anumită stare de polarizare a radiației totale emise. Dacă ansamblul emițător nu prezintă structură cristalină atunci emițătorii elementari își pot modifica în mod aleator orientarea momentului de dipol, ceea ce se evidențiază în starea de polarizare a radiației emise.

Rezultatul compunerii câmpurilor elementare poate fi analizat din două puncte de vedere.

a) La un moment dat, în planul  $(xy)$ , trebuie calculată rezultanta câmpurilor electrice fragmentate, care sunt polarizate liniar, dar a căror orientare, dacă numărul de dipoli din sursă este foarte mare (este îndeplinită condiția teoremei limită), este dirijată aleator cu egală probabilitate în unghiul plan  $(0 \div 2\pi)$  rad. O anumită distribuție a orientărilor se păstrează un interval de timp foarte mic, determinat de timpul de corelare al fragmentelor individuale. La momentul următor, în punctul considerat, o parte din semnale au depășit acest punct, iar altă parte sosesc. Din această cauză semnalul rezultat își modifică în mod aleator orientarea în unghiul plan  $(0 \div 2\pi)$  rad (fig. 31).

Dacă într-un asemenea fascicul se introduce un filtru de polarizare, acesta, de-a lungul direcției de transmisie maximă, va transmite numai proiecțiile câmpului electric dispuse după această direcție. Un receptor de radiație așezat după filtru, în intervalul de timp de măsură caracteristic receptorului, va înregistra rezultanta câmpurilor transmise de acesta. Atât amplitudinea cât și faza câmpului rezultat vor depinde de timp în mod aleator. Aceeași situație se va înregistra și într-un plan perpendicular la direcția considerată. Deoarece determinarea stării de polarizare a radiației se face în intervalul de măsură al detectorului, care este mult mai mare decât intervalul de timp al modificărilor aleatoare, acesta va înregistra un semnal care sugerează o orientare, cu egală probabilitate, a câmpului electric în toate direcțiile unghiului plan  $(0 \div 2\pi)$  rad. Acest tip de radiație este cunoscut sub denumirea de *radiație nepolarizată*.

b) Deoarece în planul  $(xy)$  numărul de semnale individuale este foarte mare, după direcțiile  $Mx$ , respectiv  $My$ , totdeauna există două câmpuri (sau proiecții ale acestora) orientate după direcții reciproc perpendiculare și care au între ele o anumită diferență de fază. Compunerea acestora va conduce la radiație polarizată eliptic.

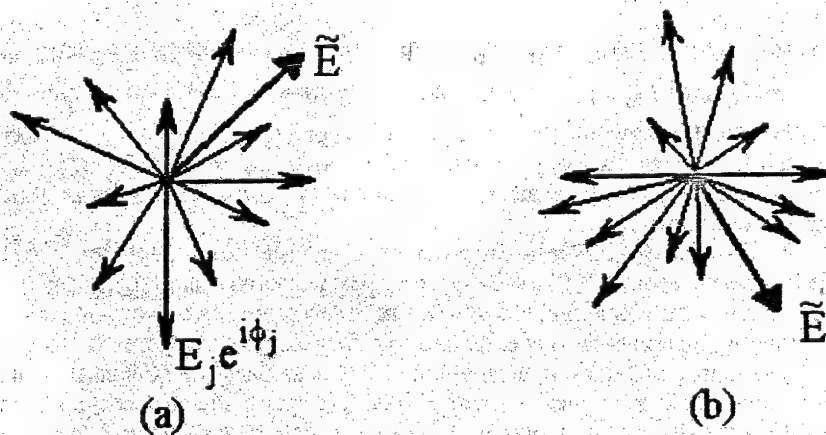


Fig. 31

Suprapunerea a două fascicule coerente de radiație polarizată eliptic conduce la un fascicul polarizat de asemenea eliptic, dar cu alți parametri ai elipsei. Aspectul elipsei rezultante depinde atât de diferența de fază a fasciculelor primare cât și de valoarea amplitudinilor componentelor de bază. Dacă diferența de fază variază, atunci elipsa își modifică orientarea și forma. Dacă durata de coerență a celor două fascicule este finită, atunci diferența de fază se modifică în mod aleator.

În fasciculul considerat mai sus forma și orientarea elipsei este stabilă numai în intervalul de timp de corelare dintre cele două câmpuri. Simultan cu exemplul considerat există un număr foarte mare de câmpuri-perechi care vor conduce la alte forme și tipuri de elipse, dar necorelate între ele.

Dacă timpul de măsură al receptorului este mai mare decât durata de coerență, poziția elipsei rezultante se va modifica rapid, în mod aleator, fiind măsurabile numai valorile și proprietățile medii, adică radiația înregistrată este nepolarizată.

2. Pentru a analiza mărimea câmpului  $e_m$  al radiației optice este comod să se utilizeze forma analitică a semnalului, semnalul real reprezentând partea reală a semnalului complex.

Dacă volumul  $\Delta V$  este foarte mic, atunci pentru toți dipolii sursei este îndeplinită condiția  $\mathbf{R}_m \cong \mathbf{R}$ , iar relațiile (4.10) devin:

$$\tilde{e}_x(\mathbf{R}, t) = \frac{\tilde{E}_x}{R} e^{i(\omega_0 t - kR)}, \text{ și } \tilde{e}_y(\mathbf{R}, t) = \frac{\tilde{E}_y}{R} e^{i(\omega_0 t - kR)},$$

unde  $E_x$  și  $E_y$  sunt mărimi aleatoare independente. Pentru valori mari ale distanței

$\mathbf{R}$ , într-un domeniu mic centrat în jurul punctului  $\mathbf{M}(\mathbf{R})$ , amplitudinea câmpului se poate considera independentă de  $\mathbf{R}$ , componentele având forma:

$$\tilde{e}_x(\mathbf{R}, t) = \tilde{E}_x e^{i(\omega_0 t - kR)} \text{ și } \tilde{e}_y(\mathbf{R}, t) = \tilde{E}_y e^{i(\omega_0 t - kR)}.$$

Deoarece componentele  $E_x$  și  $E_y$  sunt mărimi a căror valoare este lent-variabilă în timp față de funcția exponențială, la analiza unor fenomene optice, acestea pot fi considerate constante. Fazele inițiale ale grupurilor de unde sunt conținute în mărimile  $\tilde{E}_x$  și  $\tilde{E}_y$ .

Pentru o sursă individuală (dipol electric) expresia semnalului analitic este:

$$e_j = E_j e^{i\phi_j} e^{i\omega_0 t} = \tilde{E}_j e^{i\omega_0 t},$$

iar forma semnalului analitic total obținut de la sursa punctiformă este:

$$e = \sum_j e_j = \left( \sum_j E_j e^{i\phi_j} \right) e^{i\omega_0 t} = \tilde{E} e^{i\omega_0 t}.$$

Partea reală a semnalului analitic reprezintă semnalul real total:

$$e(r) = \text{Re}[\tilde{E} e^{i\omega_0 t}] = \text{Re} \left[ \left( \sum_j E_j e^{i\phi_j} \right) e^{i\omega_0 t} \right],$$

unde sumarea este extinsă asupra tuturor dipolilor ansamblului. Conform teoremei centrale limită, deoarece numărul de dipoli este foarte mare, mărimea  $\tilde{E}$  reprezintă un proces aleator gaussian. Deoarece mărimile  $E_j$  și  $\phi_j$  variază aleator de la un dipol la altul, iar între fazele  $\phi_j$  ale contribuțiilor elementare nu există corelație de fază, acestea pot fi considerate mărimi statistic independente și omogen distribuite în intervalul  $(-\pi \div +\pi)$ . Partea reală și imaginară a funcțiilor  $e_m$  reprezintă funcții complete independente, variabile aleatorii gaussiene omogen distribuite, deci cu valoare medie egală cu zero.

Fazorul resultant  $\tilde{E}$ , la un moment dat, poate fi obținut prin metoda compunerii fazoriale a lui Fresnel. El va fi caracterizat printr-o anumită amplitudine și fază. La momentul următor, datorită proceselor întâmplătoare de emisie, amplitudinea și faza se vor modifica aleator. Pentru o sursă staționară, deși numărul mediu de oscilatori este constant, mărimile  $E$  și  $\phi$  sunt dependente de timp în mod aleator. (Pentru câmpul de radiație optică emis de către surse care îndeplinesc condiția de surse punctiforme, noțiunea de fază inițială nu mai are sens)

Expresia elongației câmpului va fi de forma:

$$e(\mathbf{r}, t) = E(\mathbf{r}, t) \cos[\omega t + \phi(t)].$$

Intervalul de timp după care apare o variație importantă a fluctuației amplitudinii și fazei, reprezintă timpul de coerență și are aproximativ aceeași valoare ca și durata radiației emise de un oscilator individual. Deoarece faza oscilației rezultante



depinde în mod aleator de timp are ca rezultat faptul că valoarea frecvenței oscilației este definită în intervalul de frecvențe  $\Delta\omega$  al lății spectrale al semnalului.

Acest tip de radiație, constituit dintr-un număr mare de contribuții elementare, independente una de alta, este cunoscut sub denumirea generală de *radiație termică* sau *radiație de tip Gauss*. Opusul radiației termice este reprezentat de radiația emisă de către ansamblul de sisteme atomice dispus într-un *rezonator optic*, obținută ca rezultat al *emisiei stimulate*. Datorită acțiunii rezonatorului și a fenomenului de emisie stimulată, contribuțiile elementare la radiația totală apar ordonate și dependente unele de altele. Însă, ambele tipuri de radiație sunt constituite din aceste "contribuții elementare", care prezintă fluctuații aleatoare în timp, deci trebuie privite ca procese aleatoare.

Densitatea de flux a câmpului electromagnetic în vecinătatea unui punct, utilizând relația (4.10), se poate exprima prin relația:

$$(4.11) \quad \begin{aligned} \varphi(\mathbf{R}, t) &= \frac{1}{c\mu_0} \langle \mathbf{e} \cdot \mathbf{e}^* \rangle = \frac{1}{c\mu_0} \langle (\mathbf{e}_x \hat{i} + \mathbf{e}_y \hat{j})(\mathbf{e}_x \hat{i} + \mathbf{e}_y \hat{j}) \rangle = \\ &= \frac{1}{c\mu_0} \left[ \langle \mathbf{e}_x^2 \rangle + \langle \mathbf{e}_y^2 \rangle + 2\langle \mathbf{e}_x \mathbf{e}_y \rangle (\hat{i} \cdot \hat{j}) \right] = \varphi_x(\mathbf{R}, t) + \varphi_y(\mathbf{R}, t) \end{aligned}$$

adică, dacă există două câmpuri *em* ortogonale în fiecare punct din spațiu, densitatea totală de flux a radiației termice este egală cu suma densităților de flux a câmpurilor componente. Această proprietate permite evaluarea distribuției spațiale a energiei câmpului *em* urmărind evoluția unei singure componente. De aceea la evaluarea rezultatelor acțiunii câmpului *em*, intensitatea câmpului electric poate fi exprimată printr-o funcție scalară în loc de una vectorială.

Densitatea de flux corespunzătoare unei componente, utilizând relațiile (4.10), poate fi scrisă sub forma:

$$(4.12) \quad \begin{aligned} \varphi_x(\mathbf{R}, t) &= \frac{1}{c\mu_0} \langle \mathbf{e}_x^2 \rangle = \\ &= \frac{1}{c\mu_0} \left\langle \left( \sum_{m=1}^N \mathbf{e}_{mx} \right) \left( \sum_{n=1}^N \mathbf{e}_{nx} \right) \right\rangle = \frac{1}{c\mu_0} \left[ \sum_{m=1}^N \langle \mathbf{e}_{mx} \rangle \right] = \sum_{m=1}^N \varphi_{mx} \end{aligned}$$

iar relația (4.11) devine:

$$\varphi(\mathbf{R}, t) = \varphi_x(\mathbf{R}, t) + \varphi_y(\mathbf{R}, t) = \sum_{m=1}^N \varphi_{mx} + \sum_{m=1}^N \varphi_{my} = \sum_{m=1}^N \varphi_m$$

adică densitatea de flux în vecinătatea unui punct din spațiul de propagare a radiației optice monocromatice este egală cu suma densităților de flux determinate de fiecare grup de unde care acționează în vecinătatea acelui punct, proprietate determinată de faptul că grupurile de undă sunt generate independent unul față de altul. Densitatea totală de flux conține aceleași informații relativ la câmpul *em* ca și densitățile de flux ale grupurilor de unde care compun radiația optică monocromatică. De ex., compoziția spectrală a radiației monocromatice emisă de sursa optică este asemănătoare cu compoziția spectrală a grupurilor de unde. Determinând experimental *semilățimea*

spectrală  $\Delta\nu_0$  a radiației se poate aprecia durata grupurilor de unde care compun radiația optică.

În prezența unor asemenea fascicule necoerente, se obține radiație nepolarizată dacă este satisfăcută următoarea condiție. Considerăm două câmpuri necoerente și reciproc perpendiculare  $\mathbf{e}_x$  și  $\mathbf{e}_y$  ale căror medii ale amplitudinilor sunt egale în timp:

$\langle \mathbf{E}_x^2 \rangle = \langle \mathbf{E}_y^2 \rangle$ . Intensitatea totală este:  $I \approx \langle \mathbf{E}^2 \rangle = \langle \mathbf{E}_x^2 \rangle + \langle \mathbf{E}_y^2 \rangle$ , unde fiecărei componente îi corespunde jumătate din valoarea intensității. Deoarece sistemul de coordonate este arbitrar, un polarizor introdus în fascicul, independent de orientarea lui, transmite jumătate din valoarea intensității.

Dacă considerăm drept *direcții de bază* radiația polarizată circular, se poate efectua o tratare asemănătoare cu cea de mai sus; mărimile:

$$\mathbf{e}_+ = \mathbf{a}_+ e^{i\theta} \text{ și } \mathbf{e}_- = \mathbf{a}_- e^{-i\theta}$$

trebuie să fie necoerente (necorelate), deci trebuie să existe relația:

$$\langle |\mathbf{a}_+|^2 \rangle = \langle |\mathbf{a}_-|^2 \rangle$$

Însă dacă se suprapun câteva fascicule necoerente, fiecare în aceeași stare de polarizare totală, fasciculul rezultat de asemenea va fi complet polarizat. Considerăm un *sistem de bază polarizat liniar*. Să considerăm că fiecare componentă prezintă aceeași valoare a diferenței de fază  $\phi = \phi_y - \phi_x$  și aceeași valoare a raportului

$$r = \frac{E_y}{E_x} \text{ . Pentru un fascicul } j \text{ se poate scrie:}$$

$$\mathbf{e}_{xj} = E_{xj} e^{i\phi_{xj}} e^{i\theta}, \text{ respectiv:}$$

$$\mathbf{e}_{yj} = E_{yj} e^{i\phi_{yj}} e^{i\theta} = r E_{xj} e^{i(\phi + \phi_{xj})} e^{i\theta} = r e^{i\phi} \mathbf{e}_{xj}.$$

Deci componentele câmpului rezultat sunt:

$$(4.13 a) \quad \mathbf{e}_{x_{total}} = \sum_j E_{xj} e^{i\phi_{xj}} e^{i\theta},$$

$$(4.13 b) \quad \mathbf{e}_{y_{total}} = \sum_j \mathbf{e}_{yj} = r e^{i\phi} \sum_j \mathbf{e}_{xj} = r e^{i\phi} \mathbf{e}_{x_{total}}.$$

Chiar dacă valoarea fazelor individuale  $\phi_{xj}$  și a amplitudinilor  $A_{xj}$  fluctuează, radiația se va afla într-o stare de polarizare pură descrisă de mărimile  $r$  și  $\phi$ .

*Radiația parțial polarizată* reprezintă amestecul radiației unui fascicul aflată într-o stare de polarizare pură cu radiația nepolarizată a altui fascicul. Această

descompunere este unică. Ea depinde de coerența mutuală a câmpului electric, care oscilează de-a lungul a două direcții reciproc perpendiculare.

#### 4.4 Măsurători elementare asupra stării de polarizare a unui fascicul de radiație optică.

1 - *Intensitatea unui fascicul transmis printr-un polarizor.* Considerăm un polarizor a cărui axă de transmisie maximă este înclinată cu unghiul  $\alpha$  față de axa  $x$ . Dacă  $e_x$ , respectiv  $e_y$ , reprezintă componentele carteziene ale câmpului electric, mărimea câmpului transmis de polarizor reprezintă suma proiecțiilor componentelor câmpului pe direcția de transmisie maximă a polarizorului:

$$(4.14 a) \quad e(\alpha) = e_x \cos \alpha + e_y \sin \alpha,$$

iar intensitatea transmisă este:

$$(4.14 b) \quad \langle e(\alpha)^2 \rangle = \langle e_x^2 \rangle \cos^2 \alpha + \langle e_y^2 \rangle \sin^2 \alpha + 2 \langle e_x \cdot e_y \rangle \sin \alpha \cos \alpha.$$

Dacă funcția de corelare este egală cu zero  $\langle e_x \cdot e_y \rangle = 0$ , atunci intensitățile asociate direcțiilor  $x$ , respectiv  $y$  se adună. Această situație poate apare dacă sunt îndeplinite ambele sau una din următoarele condiții:

- mărimile  $e_x$  și  $e_y$  nu prezintă corelare mutuală;
- mărimile  $e_x$  și  $e_y$  sunt corelate, însă prezintă între ele o diferență de fază egală cu  $\pi/2$  rad.

Dacă există relația  $\langle e_x \cdot e_y \rangle \neq 0$ , între componente există corelare, dar pe baza relației (4.14 b) aceasta nu poate fi determinată în mod univoc. Pentru a caracteriza radiația în mod univoc, este necesar să se introducă o diferență de fază suplimentară, apoi fasciculul trebuie transmis printr-un polarizor ce se rotește. Deoarece modificarea fazei de către compensatorul de polarizare (dispozitiv care modifică faza oscilațiilor după direcțiile  $x$ , respectiv  $y$ ), depinde de lungimea de undă, trebuie să se considere radiații armonice, deci semnale analitice:

$$e_x(t) = E_x \cos(\omega t + \phi_x) = \text{Re}[\tilde{e}_x(t)] = \text{Re}[E_x e^{i\phi_x} e^{i\omega t}]$$

$$e_y(t) = E_y \cos(\omega t + \phi_y) = \text{Re}[\tilde{e}_y(t)] = \text{Re}[E_y e^{i\phi_y} e^{i\omega t}],$$

unde  $E_x$  și  $\phi_x$  - amplitudinea și faza sunt funcții lent-dependente de timp față de variațiile măririi  $\cos \omega t$ . Densitatea de flux este proporțională cu:

$$(4.15) \quad \langle e_x^2 \rangle = \frac{1}{2} \langle E_x^2 \rangle = \frac{1}{2} \langle \tilde{E}_x \cdot \tilde{E}_x^* \rangle.$$

Pentru câmpul transmis de polarizor se poate scrie:

$$(4.15 a) \quad \tilde{e}(\alpha) = \tilde{e}_x \cos \alpha + \tilde{e}_y \sin \alpha,$$

iar densitatea spectrală de flux este:

$$(4.15 b)$$

$$\frac{\varphi(\alpha)}{2} = \frac{\langle \tilde{e}(\alpha) \tilde{e}(\alpha)^* \rangle}{2} =$$

$$= \frac{\langle \tilde{e}_x \tilde{e}_x^* \rangle}{2} \cos^2 \alpha + \frac{\langle \tilde{e}_y \tilde{e}_y^* \rangle}{2} \sin^2 \alpha + \frac{\langle \tilde{e}_x \tilde{e}_y^* \rangle + \langle \tilde{e}_x^* \tilde{e}_y \rangle}{2} \sin \alpha \cos \alpha$$

*Compensator plus polarizor.* Compensatorul este introdus înaintea polarizorului, astfel încât faza componentei  $y$  este deplasată de la valoarea  $\phi_y$  la  $\phi_y - \delta + \varepsilon$ , iar faza componentei  $x$ , de la valoarea  $\phi_x$  la  $\phi_x + \varepsilon$ . Expresiile componentelor câmpului electric sunt:

$$E_x e^{i\phi_x} e^{i(\omega t + \varepsilon)} = e^{i\varepsilon} \tilde{e}_x$$

$$E_y e^{i(\phi_y - \delta)} e^{i(\omega t + \varepsilon)} = e^{-i(\delta - \varepsilon)} \tilde{e}_y.$$

Expresia semnalului transmis prin polarizorul dispus sub unghi  $\alpha$  este:

$$(4.16 a) \quad \tilde{e}(\alpha, \delta) = (\tilde{e}_x \cos \alpha + e^{-i\delta} \tilde{e}_y \sin \alpha) e^{i\varepsilon},$$

iar expresia densității de flux:

$$(4.16 b) \quad \frac{I(\alpha, \delta)}{2} = \frac{1}{2} \left\{ \langle \tilde{e}_x \tilde{e}_x^* \rangle \cos^2 \alpha + \langle \tilde{e}_y \tilde{e}_y^* \rangle \sin^2 \alpha + \right.$$

$$\left. + \left[ \langle \tilde{e}_x \tilde{e}_y^* \rangle e^{i\delta} + \langle \tilde{e}_x^* \tilde{e}_y \rangle e^{-i\delta} \right] \sin \alpha \cos \alpha \right\}$$

depinde de variația fazei  $(-\delta)$  a componentelor  $e_x$  și  $e_y$  determinată de compensator, și nu depinde de variația comună de fază  $(\varepsilon)$ .

#### 4.5 Matricea de coerență.

În relația (4.16 b) au fost introduse patru valori medii:

$$(4.17) \quad J_{xx} = \langle \tilde{e}_x \tilde{e}_x^* \rangle; \quad J_{xy} = \langle \tilde{e}_x \tilde{e}_y^* \rangle, \quad J_{yx}^* = \langle \tilde{e}_y \tilde{e}_x^* \rangle^* = \langle \tilde{e}_x \tilde{e}_y^* \rangle = J_{xy}$$

$$J_{yy} = \langle \tilde{e}_y \tilde{e}_y^* \rangle; \quad J_{yy}^* = \langle \tilde{e}_y^* \tilde{e}_y \rangle,$$

care reprezintă elementele unei matrici de tip hermitic, cunoscută sub denumirea de *matrice de coerență*:

$$(4.18 a) \quad [J] = \begin{bmatrix} J_{xx} & J_{xy} \\ J_{yx} & J_{yy} \end{bmatrix},$$

deoarece sunt îndeplinite condițiile:

$$J_{xx} = J_{xx}^* = \langle \tilde{e}_x \tilde{e}_x^* \rangle; \quad J_{yy} = J_{yy}^* \text{ și } J_{xy}^* = J_{yx}.$$

Folosind elementele de matrice, relația (4.16 b) poate fi scrisă sub forma:

$$(4.19) \quad I(\alpha, \delta) = J_{xx} \cos^2 \alpha + J_{yy} \sin^2 \alpha + (J_{xy} e^{i\delta} + J_{yx} e^{-i\delta}) \sin \alpha \cos \alpha = \\ = J_{xx} \cos^2 \alpha + J_{yy} \sin^2 \alpha + 2|J_{xy}| \sin \alpha \cos \alpha \cos(\delta - \phi)$$

unde s-a considerat:

$$J_{xy} = \langle \tilde{e}_x \tilde{e}_y \rangle = \langle E_x e^{i\phi_x} e^{i\omega t} E_y e^{-i\phi_y} e^{-i\omega t} \rangle = |J_{xy}| e^{-i\phi}, \text{ respectiv}$$

$$J_{yx} = |J_{xy}| e^{i\phi}, \text{ iar } \phi = \phi_y - \phi_x.$$

Dacă se efectuează medierea relației (4.19) după toate unghiurile  $\alpha$ , se obține:

$$\langle I(\alpha, \delta) \rangle_\alpha = \frac{\Phi_0}{2} = \frac{1}{2} (J_{xx} + J_{yy}),$$

unde:

$$(4.20) \quad \Phi_0 = J_{xx} + J_{yy} = \varphi(\alpha, \delta) + \varphi\left(\alpha \pm \frac{\pi}{2}, \delta\right) = \text{Tr} J \text{ (urma matricii)}.$$

Mărimile:  $J_{xx} \equiv \varphi(0, \delta)$ ,  $J_{yy} \equiv \varphi\left(\frac{\pi}{2}, \delta\right)$  pot fi măsurate pentru două poziții reciproc perpendiculare ale polarizorului.

Natura polarizării radiației este independentă de intensitatea energetică inițială  $\Phi_0$ , ea depinde numai de raportul elementelor de matrice  $J_{ij}$ . De aceea se introduce

noțiunea de *matrice de coerență redusă*:  $[j] = \frac{[J]}{\Phi_0}$ , caracterizată prin elementele de

$$\text{matrice: } j_{xx} = \frac{J_{xx}}{\Phi_0}, \text{ deci: } \text{Tr} [j] = 1.$$

#### 4.5.1 Determinarea valorii elementelor matricii de coerență.

Deoarece:  $J_{xy} = J_{yx}^* = |J_{xy}| e^{-i\phi}$ , pentru a stabili expresia matricii  $J$  este

necesar să se cunoască patru mărimi reale independente  $J_{xx}$ ,  $J_{yy}$ ,  $|J_{xy}|$  și  $\phi$ , care pot fi determinate dacă se efectuează patru măsurători asupra densității de flux a fasciculului utilizând un polarizor și un compensator:

1. - dacă polarizorul este dispus cu axa de transmisie maximă de-a lungul axei  $x$ , se determină mărimea:

$$(4.21 a) \quad \varphi(0, \delta) \equiv J_{xx};$$

2. - dacă polarizorul este dispus cu axa de transmisie maximă de-a lungul axei  $y$ , se determină mărimea:

$$(4.21 b) \quad \varphi\left(\frac{\pi}{2}, \delta\right) = J_{yy};$$

3. - dacă polarizorul este dispus la  $45^\circ$  față de axa  $x$ , se determină mărimea:

$$(4.21 c) \quad \varphi\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) = \frac{1}{2} (J_{xx} + J_{yy} + J_{xy} + J_{yx}) = \\ = \frac{1}{2} (J_{xx} + J_{yy}) + \frac{1}{2} (J_{xy} + J_{yx}) = \frac{1}{2} (J_{xx} + J_{yy}) + \frac{1}{2} \text{Re} J_{xy}$$

4. - o lamă sfert de lungime de undă cu axa rapidă de-a lungul direcției  $x$  ( $\delta = \frac{\pi}{2}$ ) urmată de un polarizor dispus la  $45^\circ$  față de această axă, permite determinarea mărimii:

$$(4.21 d) \quad \varphi\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} [J_{xx} + J_{yy} + i(J_{xy} - J_{yx})] = \frac{1}{2} (J_{xx} + J_{yy}) - \text{Im} J_{xy}.$$

Pe baza acestor măsurători se poate deduce valoarea mărimilor:

$$J_{xx}; J_{yy}; \text{Re} J_{xy} = |J_{xy}| \cos \phi; \text{Im} J_{xy} = |J_{xy}| \sin \phi.$$

#### 4.6 Expresia matricii de coerență pentru câteva tipuri de radiație optică polarizată.

*Radiație polarizată liniear.* Dacă  $\tilde{E}_0$  reprezintă fazorul câmpului inițial de radiație, atunci componentele vectorului  $E_0$ , orientat sub unghi  $\alpha_0$  față de axa  $x$  sunt (fig. 32):

$$\tilde{e}_x = \tilde{E}_0 \cos \alpha_0 \text{ și } \tilde{e}_y = \tilde{E}_0 \sin \alpha_0.$$



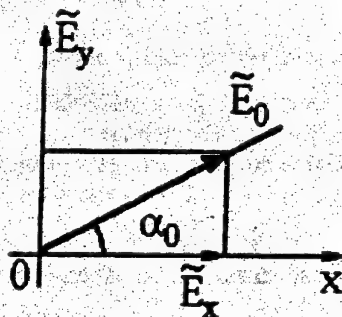


Fig. 32

Dacă direcția de transmisie maximă a unui polarizor este orientată sub unghiul  $\pm \alpha_0$ , valoarea intensității transmise  $\varphi_0 = \langle \tilde{E}_0 \tilde{E}_0^* \rangle$ , este egală cu cea a intensității fascicului incident. Dacă direcția de transmisie maximă este orientată sub unghiul  $\alpha = \pm \alpha_0 \pm \frac{\pi}{2}$ , atunci valoarea intensității transmise este egală cu zero.

În cazuri intermediare, valoarea elementelor de matrice ce apar în relația (4.17) este:

$$J_{xx} = \varphi_0 \cos^2 \alpha_0; J_{yy} = \varphi_0 \sin^2 \alpha_0; J_{xy} = J_{yx} = \varphi_0 \sin \alpha_0 \cos \alpha_0.$$

Dacă în relația (4.19) se consideră deplasarea fazei  $\delta = 0$ , atunci se obține:

$$\begin{aligned} \varphi(\alpha, 0) &= \\ &= \varphi_0 (\cos^2 \alpha \cos^2 \alpha_0 + \sin^2 \alpha \sin^2 \alpha_0 + 2 \sin \alpha \cos \alpha \sin \alpha_0 \cos \alpha_0) = \\ &= \varphi_0 \cos^2 (\alpha - \alpha_0) \end{aligned}$$

relație ce reprezintă *legea lui Malus*.

Matricea de coerență are expresia:

$$(4.22) \quad [J_{\alpha_0}] = \varphi_0 \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha_0 & \sin \alpha_0 \cos \alpha_0 \\ \sin \alpha_0 \cos \alpha_0 & \sin^2 \alpha_0 \end{bmatrix},$$

care în cazuri particulare devine:

$$[J_{0^\circ}] = \varphi_0 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, [J_{90^\circ}] = \varphi_0 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, [J_{45^\circ}] = \frac{\varphi_0}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

*Radiație polarizată circular.* În acest caz există relațiile:

$$E_x = E_y,$$

$$\phi = \phi_y - \phi_x = -\frac{\pi}{2} \quad \text{RPCS - elicitate (+) sau}$$

$$\phi = \phi_y - \phi_x = \frac{\pi}{2} \quad \text{RPCD - elicitate (-)}.$$

Deci:

$$J_{xx} = J_{yy} = \langle E_x^2 \rangle$$

$$J_{xy} = \langle E_x^2 \rangle e^{i(\phi_y - \phi_x)} = \langle E_x^2 \rangle e^{i\frac{\pi}{2}} = i \langle E_x^2 \rangle = -J_{yx} \quad (\text{RPCS})$$

$$J_{xy} = -J_{yx} = -i \langle E_x^2 \rangle \quad (\text{RPCD})$$

Dacă radiația polarizată circular este transmisă printr-o lamă  $\frac{\lambda}{4}$ , cu axa optică orientată de-a lungul axei  $x$  sau  $y$ , se obține radiație polarizată liniar sub unghiul  $\alpha_0 = \pm \frac{\pi}{4}$ , caracterizată prin matricea de coerență (pentru  $\alpha_0 = \frac{\pi}{4}$ ):

$$[J] = \begin{bmatrix} J_{xx} & J_{xx} \\ J_{xx} & J_{xx} \end{bmatrix}.$$

Intensitatea maximă  $\varphi_0 = 2 J_{xy}$  se obține dacă  $\alpha = \alpha_0$ . De unde:

$$J_{xy} = \frac{\varphi_0}{2} = \langle E_x^2 \rangle, \text{ iar matricea de coerență a radiației inițiale este:}$$

$$(4.23) \quad [J_{\text{RPCS}}] = \frac{\varphi_0}{2} \begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{bmatrix} \text{ și } [J_{\text{RPCD}}] = \frac{\varphi_0}{2} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{bmatrix}.$$

*Radiație polarizată eliptic.* În acest caz există relațiile:

$$\tilde{e}_x = E_x e^{i\phi_x} e^{i\omega t} \text{ și } \tilde{e}_y = E_y e^{i\phi_y} e^{i\omega t},$$

unde mărimea raportului  $r = \frac{E_y}{E_x}$  și a diferenței de fază  $\phi = \phi_y - \phi_x$  sunt

constante. Expresia intensității totale (4.20) este:

$$\varphi_0 = J_{xx} + J_{yy} = \langle E_x^2 \rangle + \langle E_y^2 \rangle$$

Dacă se definește unghiul  $\gamma$  astfel încât:  $\tan \gamma = \frac{E_y}{E_x}$ , se obțin relațiile:

$$E_y = E_x \frac{\sin \gamma}{\cos \gamma}; \quad \varphi_0 = \frac{\langle E_x^2 \rangle}{\cos^2 \gamma};$$

$$J_{xx} = \langle e_x e_x^* \rangle = \langle E_x^2 \rangle = \varphi_0 \cos^2 \gamma;$$

$$J_{yy} = \langle e_y e_y^* \rangle = \langle E_y^2 \rangle = \varphi_0 \sin^2 \gamma;$$

$$J_{yx} = \langle e_y e_x^* \rangle = \langle E_y e^{i\phi_y} E_x e^{-i\phi_x} \rangle = \varphi_0 e^{i(\phi_y - \phi_x)} \sin \gamma \cos \gamma,$$

forma matricii de coerență, care include și relațiile (4.22, 4.23), este:

$$(4.24) \quad [J] = \varphi_0 \begin{bmatrix} \cos^2 \gamma & e^{-i\phi} \sin \gamma \cos \gamma \\ e^{i\phi} \sin \gamma \cos \gamma & \sin^2 \gamma \end{bmatrix}$$

Se observă că pentru toate stările de polarizare pură există relația:

$$\det J = J_{xx} J_{yy} - J_{xy} J_{yx} = 0.$$

Dacă radiația descrisă de matricea (4.24) este transmisă printr-un compensator, astfel încât faza componentei  $\tilde{e}_y$  este întârziată cu:  $\delta = -\phi$  față de cea a componentei  $\tilde{e}_x$ , atunci expresia matricii de coerență devine:

$$(4.24') \quad [J'] = \varphi_0 \begin{bmatrix} \cos^2 \gamma & \sin \gamma \cos \gamma \\ \sin \gamma \cos \gamma & \sin^2 \gamma \end{bmatrix}$$

adică se obține radiație polarizată liniar pe direcția  $\gamma$  (relația (4.22)).

**Radiație nepolarizată.** Este caracterizată printr-o valoare constantă a densității de flux transmisă, independent de valoarea unghiului  $\alpha$  și a deplasării  $\delta$  a fazei:

$$\varphi(\alpha, \delta) = \frac{\varphi_0}{2} = \text{ct}, \text{ de unde: } J_{xy} = J_{yx} = 0 \text{ și } J_{xx} = J_{yy} = \frac{\varphi_0}{2}.$$

Prin urmare:  $[J] = \frac{\varphi_0}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ , adică se obține un multiplu al matricii unitate.

#### 4.7 Compunerea a două fascicule de radiație necoerentă.

Două fascicule de radiație, care se propagă în aceeași direcție, sunt reciproc necoerente dacă semnalele analitice sunt necorelate, adică dacă sunt îndeplinite condițiile:

$$\langle \tilde{e}_x^{(1)} \tilde{e}_x^{(2)*} \rangle = \langle \tilde{e}_y^{(1)} \tilde{e}_y^{(2)*} \rangle = \langle \tilde{e}_x^{(1)} \tilde{e}_y^{(2)*} \rangle = \langle \tilde{e}_y^{(1)} \tilde{e}_x^{(2)*} \rangle = 0.$$

Matricea de coerență  $[J]$  a semnalului analitic rezultat, caracterizat prin componentele:

$$\begin{bmatrix} \tilde{e}_x \\ \tilde{e}_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{e}_x^{(1)} + \tilde{e}_x^{(2)} \\ \tilde{e}_y^{(1)} + \tilde{e}_y^{(2)} \end{bmatrix}$$

va fi reprezentată prin suma matricelor de coerență individuale:

$$\begin{bmatrix} \langle e_x e_x^* \rangle & \langle e_x e_y^* \rangle \\ \langle e_y e_x^* \rangle & \langle e_y e_y^* \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle \tilde{e}_x^{(1)} \tilde{e}_x^{(1)*} \rangle & \langle \tilde{e}_x^{(1)} \tilde{e}_y^{(1)*} \rangle \\ \langle \tilde{e}_y^{(1)} \tilde{e}_x^{(1)*} \rangle & \langle \tilde{e}_y^{(1)} \tilde{e}_y^{(1)*} \rangle \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \langle \tilde{e}_x^{(2)} \tilde{e}_x^{(2)*} \rangle & \langle \tilde{e}_x^{(2)} \tilde{e}_y^{(2)*} \rangle \\ \langle \tilde{e}_y^{(2)} \tilde{e}_x^{(2)*} \rangle & \langle \tilde{e}_y^{(2)} \tilde{e}_y^{(2)*} \rangle \end{bmatrix}.$$

Natura fasciculului polarizat este independentă de  $\varphi_0$ , deci este determinată

în mod univoc de matricea de coerență redusă  $[j] = \frac{[J]}{\varphi_0}$ . Dacă fasciculele componente

sunt caracterizate prin aceeași matrice redusă  $[j^{(1)}] = [j^{(2)}]$ , atunci matricea de coerență a fasciculului rezultat este:

$$[J] = \varphi_1 [j] + \varphi_2 [j] = (\varphi_1 + \varphi_2) [j].$$

Compunerea a două fascicule necoerente aflate în aceeași stare de polarizare conduce la un fascicul caracterizat prin aceeași polarizare ca și componentele inițiale.

Modul de compunere a fasciculelor necoerente este util pentru descrierea radiației nepolarizate. De ex., radiație nepolarizată poate fi descrisă ca o suprapunere a două componente polarizate liniar, egal necoerente, cu plane de oscilație reciproc perpendiculare. Dacă unul dintre plane are o înclinare  $\alpha_0$  față de axa  $x$ , atunci o componentă a matricii de coerență este:

$$[j^{(1)}] = [J(\alpha_0)] = \frac{\varphi_0}{2} \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha_0 & \sin \alpha_0 \cos \alpha_0 \\ \sin \alpha_0 \cos \alpha_0 & \sin^2 \alpha_0 \end{bmatrix}.$$

iar planul celei de a doua componente prezintă înclinarea  $\left(\alpha_0 \pm \frac{\pi}{2}\right)$  și matricea de coerență:

$$[J^{(2)}] = \left[ J \left( \alpha_0 \pm \frac{\pi}{2} \right) \right] = \frac{\varphi_0}{2} \begin{bmatrix} \sin^2 \alpha_0 & -\sin \alpha_0 \cos \alpha_0 \\ -\sin \alpha_0 \cos \alpha_0 & \cos^2 \alpha_0 \end{bmatrix},$$

rezultă:  $[J] = [J^{(1)}] + [J^{(2)}] = \frac{\varphi_0}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  (radiație nepolarizată).

Radiație nepolarizată poate fi descrisă și ca o suprapunere de fascicule necoerente polarizate circular-dreapta, respectiv -stânga, caracterizată prin matricile:

$$[J^{(1)}] = [J_{\text{RPCS}}] = \frac{\varphi_0}{4} \begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{bmatrix}, \quad [J^{(2)}] = [J_{\text{RPCD}}] = \frac{\varphi_0}{4} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{bmatrix};$$

$$[J] = [J^{(1)}] + [J^{(2)}] = \frac{\varphi_0}{4} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

De asemenea două fascicule necoerente, fiecare într-o stare de polarizare eliptică pură, pot fi combinate pentru a obține radiație nepolarizată. Matricea de coerență a celor două stări este:

$$[J^{(1)}] = \varphi_1 \begin{bmatrix} \cos^2 \delta_1 & e^{-i\phi_1} \sin \delta_1 \cos \delta_1 \\ e^{i\phi_1} \sin \delta_1 \cos \delta_1 & \sin^2 \delta_1 \end{bmatrix}, \text{ respectiv:}$$

$$[J^{(2)}] = \varphi_2 \begin{bmatrix} \cos^2 \delta_2 & e^{-i\phi_2} \sin \delta_2 \cos \delta_2 \\ e^{i\phi_2} \sin \delta_2 \cos \delta_2 & \sin^2 \delta_2 \end{bmatrix}$$

Dacă se consideră:  $\delta_2 = \frac{\pi}{2} - \delta_1$ ,  $\phi_2 = \pi + \phi_1$ ,  $\varphi_1 = \varphi_2 = \frac{\varphi_0}{2}$ , atunci se obține:

$$[J] = [J^{(1)}] + [J^{(2)}] = \frac{\varphi_0}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ultimul exemplu include pe primele două ca un caz special: pentru  $\phi_1 = 0$  și

$\delta_1 = \alpha_0$ , se obține primul caz, iar pentru  $\phi_1 = -\frac{\pi}{2}$  și  $\delta_1 = \frac{\pi}{4}$  cel de-al doilea.

Aceste cazuri sunt: axa mare a elipsei este la  $90^\circ$  față de cealaltă, iar elipsele au aceeași formă și dimensiune, cu elicitate opusă (fig. 33).

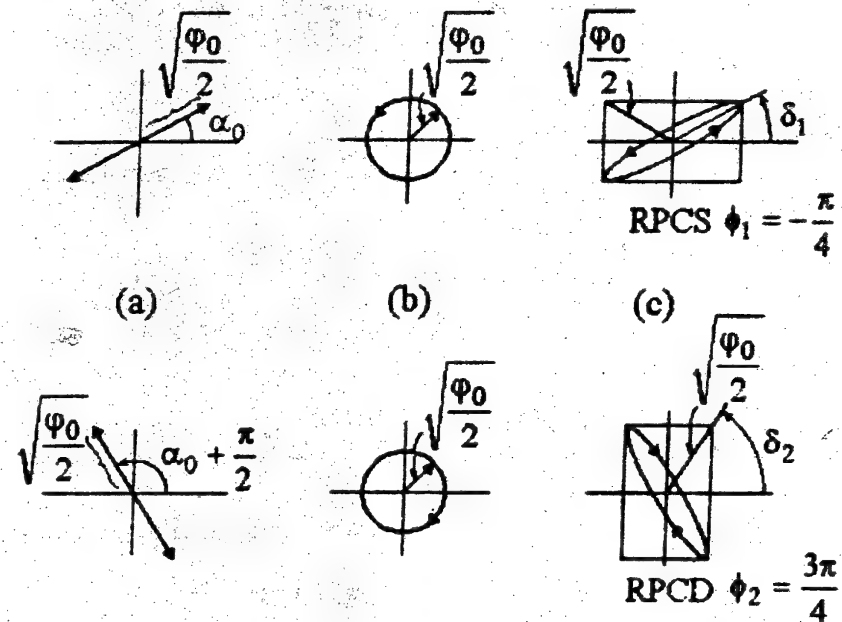


Fig. 33

#### 4.8 Radiația polarizată parțial exprimată ca o suprapunere de radiație nepolarizată și polarizată eliptic.

Radiația polarizată parțial poate fi obținută ca rezultat al suprapunerii radiației nepolarizate cu radiația polarizată pură (în general eliptic polarizată), iar descompunerea este unică. În acest scop trebuie arătat că o matrice de coerență arbitrară  $[J]$  poate fi scrisă sub forma:

$$(4.25) \quad [J] = \begin{bmatrix} J_{xx} & J_{xy} \\ J_{xy}^* & J_{yy} \end{bmatrix} = [J^{(1)}] + [J^{(2)}] = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B & D \\ D^* & C \end{bmatrix}$$

Matricea  $[J^{(2)}]$  descrie o stare de polarizare pură, deci determinantul ei este egal cu zero, adică trebuie îndeplinită condiția:

$$(4.26) \quad BC - DD^* = 0.$$

Pe de altă parte, matricea  $[J^{(2)}]$  trebuie să conducă numai la valori nenegative ale intensității (relația 4.15 b), deci sunt necesare condițiile:



$\varphi(0) \geq 0$ , adică:  $B \geq 0$ , respectiv:  $\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) \geq 0$ , adică:  $C \geq 0$ .

Din matricea (4.25) rezultă:

$$J_{xx} = A + B; J_{xy} = D; J_{xy}^* = D^* \text{ și } J_{yy} = A + C,$$

de unde rezultă relațiile:  $B = J_{xx} - A$  și  $C = J_{yy} - A$ , care introduse în (4.26) conduc la rezultatul:

$$(4.27) \quad (J_{xx} - A)(J_{yy} - A) - J_{xy}^2 = 0, \text{ sau: } A^2 - A(J_{xx} + J_{yy}) + (J_{xx}J_{yy} - J_{xy}J_{yx}) = 0,$$

care este identică cu forma:

$$(4.27') \quad A^2 - A \operatorname{Tr} J + \det J = 0$$

Relația (4.27) reprezintă ecuația caracteristică a matricei  $J$ , care poate fi scrisă sub forma:

$$\det(J - A[I]) = 0 \text{ sau } \det \begin{pmatrix} J_{xx} - A & J_{xy} \\ J_{yx} & J_{yy} - A \end{pmatrix} = 0,$$

$$\text{unde: } [I] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ (matricea unitate).}$$

Soluțiile ecuației caracteristice ale matricii  $J$  sunt:

$$(4.28) \quad A_{1,2} = \frac{\operatorname{Tr} J \pm \sqrt{(\operatorname{Tr} J)^2 - 4 \det J}}{2}.$$

Se observă că:

$$(4.29) \quad (\operatorname{Tr} J)^2 - 4 \det J = (J_{xx} + J_{yy})^2 - 4(J_{xx}J_{yy} - |J_{xy}|^2) = (J_{xx} - J_{yy})^2 + 4|J_{xy}|^2 \geq 0$$

adică valoarea radicalului se exprimă printr-o mărime reală.

Soluțiile  $A_{1,2}$  sunt nenegative. Pentru soluția  $A_1$  aceasta este evident:

$$A_1 = \frac{\operatorname{Tr} J + \sqrt{(\operatorname{Tr} J)^2 - 4 \det J}}{2}$$

$$\text{Pentru soluția: } A_2 = \frac{\operatorname{Tr} J - \sqrt{(\operatorname{Tr} J)^2 - 4 \det J}}{2} \text{ este necesară condiția:}$$

$$\sqrt{(\operatorname{Tr} J)^2 - 4 \det J} \leq \operatorname{Tr} J.$$

De asemenea din relația (4.29) rezultă:

$$\sqrt{(\operatorname{Tr} J)^2 - 4 \det J} = \sqrt{(J_{xx} - J_{yy})^2 - 4|J_{xy}|^2} \geq 0, \text{ sau:}$$

$$\sqrt{(\operatorname{Tr} J)^2 - 4 \det J} \geq |J_{xx} - J_{yy}|,$$

deci:

$$A_1 = \frac{\operatorname{Tr} J + \sqrt{(\operatorname{Tr} J)^2 - 4 \det J}}{2} \geq \frac{(J_{xx} + J_{yy}) + |J_{xx} - J_{yy}|}{2} = J_{xx},$$

dacă:  $J_{xx} \geq J_{yy}$ , sau:

$$A_1 \geq J_{yy}, \text{ dacă: } J_{yy} \geq J_{xx}.$$

Dar  $B = J_{xx} - A \geq 0$ , adică este necesar ca:  $C = J_{yy} - A \geq 0$ , deci mărimea  $A_1$  nu îndeplinește condiția fizică.

$$\text{Rezultă: } A = A_2 = \frac{\operatorname{Tr} J - \sqrt{(\operatorname{Tr} J)^2 - 4 \det J}}{2}, \text{ iar:}$$

$$B = J_{xx} - A_2 = \frac{2J_{xx} - J_{xx} - J_{yy} + \sqrt{(\operatorname{Tr} J)^2 - 4 \det J}}{2} = \frac{J_{xx} - J_{yy} + \sqrt{(\operatorname{Tr} J)^2 - 4 \det J}}{2}$$

$$C = J_{yy} - A_2 = \frac{J_{yy} - J_{xx} + \sqrt{(\operatorname{Tr} J)^2 - 4 \det J}}{2}.$$

Expresia intensității energetice totale devine:

$$\Phi_0 = J_{xx} + J_{yy} = \operatorname{Tr} J = A_1 + A_2.$$

Expresia intensității energetice a părții de radiație polarizată devine:

$$\Phi_{\text{pol}} = \operatorname{Tr} J^{(2)} = B + C = \sqrt{(\operatorname{Tr} J)^2 - 4 \det J} = A_1 - A_2,$$

iar intensitatea energetică a părții de radiație nepolarizată este:

$$\Phi_{\text{nepol.}} = \Phi_0 - \Phi_{\text{pol.}} = 2A_2.$$

Gradul de polarizare reprezintă raportul intensității părții de radiație polarizată la cea a fasciculului total:

$$P = \frac{\varphi_{\text{pol.}}}{\varphi_0} = \frac{A_1 - A_2}{A_1 + A_2} = \frac{\sqrt{(\text{Tr}[J])^2 - 4 \det[J]}}{\text{Tr}[J]} = \sqrt{1 - \frac{4 \det[J]}{(\text{Tr}[J])^2}}$$

Matricea  $[J^{(1)}]$  descrie un fascicul de radiație nepolarizată:

$$[J^{(1)}] = \begin{bmatrix} A_2 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} = \frac{\varphi_{\text{nepol.}}}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

iar matricea  $[J^{(2)}]$  descrie un fascicul de radiație polarizat pur eliptic, deci:

$$[J^{(2)}] = \begin{bmatrix} B & J_{xy} \\ J_{xy}^* & C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B & |J_{xy}| e^{-i\phi} \\ |J_{xy}| e^{i\phi} & C \end{bmatrix} =$$

$$= \varphi_{\text{pol}} \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha_0 & \sin \alpha_0 \cos \alpha_0 e^{-i\phi} \\ \sin \alpha_0 \cos \alpha_0 e^{i\phi} & \sin^2 \alpha_0 \end{bmatrix},$$

$$\text{unde: } \tan \alpha_0 = \sqrt{\frac{B}{C}}$$

Dacă fasciculul este transmis printr-un compensator care deplasează fază cu  $\delta = -\phi$ , atunci expresia matricii  $[J^{(2)}]$  devine:

$$[J^{(2)}] = \begin{bmatrix} B & |J_{xy}| \\ |J_{xy}| & C \end{bmatrix} = I_{\text{pol}} \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha_0 & \sin \alpha_0 \cos \alpha_0 \\ \sin \alpha_0 \cos \alpha_0 & \sin^2 \alpha_0 \end{bmatrix},$$

în timp ce expresia matricii  $[J^{(1)}]$  rămâne neschimbată.

Dacă fasciculul este transmis printr-un polarizor înclinat cu unghiul  $\alpha$ , expresia intensității va fi:

$$\varphi(\alpha, -\phi) = \frac{\varphi_{\text{nepol.}}}{2} + \varphi_{\text{pol}} \cos^2(\alpha - \alpha_0) =$$

$$= \frac{\varphi_0 - \varphi_{\text{pol}}}{2} + \varphi_{\text{pol}} \cos^2(\alpha - \alpha_0) = \varphi_0 \left[ \frac{1}{2} + P \left( \cos^2(\alpha - \alpha_0) - \frac{1}{2} \right) \right],$$

a cărei valoare maximă este:

$$\varphi_{\text{max}} = \frac{\varphi_0}{2} (1 + P) = \frac{\varphi_0}{2} \left( 1 + \frac{A_1 - A_2}{A_1 + A_2} \right) = A_1,$$

respectiv, valoarea minimă:

$$\varphi_{\text{min}} = \frac{\varphi_0}{2} (1 - P) = A_2.$$

Prin urmare valoarea gradului de polarizare este:

$$P = \frac{A_1 - A_2}{A_1 + A_2} = \frac{\varphi_{\text{max}} - \varphi_{\text{min}}}{\varphi_{\text{max}} + \varphi_{\text{min}}}.$$

Dacă  $\delta \neq -\phi$  atunci valorile maxime și minime ale mărimii  $I(\alpha, \delta)$  vor fi mai mici, respectiv mai mari decât cele obținute mai sus.

#### 4.9 Caracterizarea experimentală

a unui fascicul de radiație polarizată parțial.

Radiația polarizată parțial reprezintă un amestec de radiație nepolarizată și eliptic polarizată. Ea poate fi caracterizată dacă se cunosc cinci parametri: intensitatea energetică totală ( $\varphi_0$ ), gradul de polarizare  $P$ , unghiul de orientare  $\beta/2$  a axei mari a elipsei, raportul  $\tan \eta$  al lungimii axei mici față de cea mare și sensul de rotație al elicității. Determinarea acestor parametri se poate face utilizând un polarizor și o lamă sfert de lungime de undă.

Se plasează întâi polarizorul în fascicul și se rotește până se observă intensitatea maximă. Cele două direcții de transmisie care dau maxim de intensitate corespund vectorului câmp electric  $e$  care oscilează de-a lungul axelor principale ale

elipsei, deci corespund unghiurilor  $\left(\frac{\beta}{2}\right)$  și  $\left(\frac{\beta}{2} + \frac{\pi}{2}\right)$ . Direcția de transmisie care

corespunde valorii minime a intensității este  $\left(\frac{\beta}{2} \pm \frac{\pi}{2}\right)$ .

Starea de polarizare a radiației fascicului transmis este cuprinsă între două situații extreme:

$$\text{- radiație polarizată pur eliptic caracterizată prin } \tan \eta = \sqrt{\frac{\varphi_{\text{min}}}{\varphi_{\text{max}}}};$$

- amestec de radiație nepolarizată și polarizată liniar care oscilează de-a lungul direcției de azimut  $\left(\frac{\beta}{2}\right)$ .

În acest caz este convenabil să se considere un set nou de axe de-a lungul versorilor  $\hat{i}$  și  $\hat{j}$ . Se introduce o lamă  $\lambda/4$  în fasciculul inițial, astfel încât axa ei "rapidă" este dispusă de-a lungul versorului  $\hat{i}$ . Radiația polarizată eliptic cu axa mare de-a lungul versorului  $\hat{i}$  va fi transformată în radiație polarizată liniar care oscilează

sub unghiul  $\pm \eta$  față de  $\hat{i}$ , unde semnul plus se referă la radiația polarizată eliptic-dreapta, iar semnul minus la radiația polarizată eliptic-stânga. Dacă radiația originală reprezintă un amestec de radiație nepolarizată și polarizată liniar care oscilează de-a lungul lui  $\hat{i}$ , acțiunea lamei  $\lambda/4$  nu are nici un efect.

În cazul când avem amestec va exista o componentă nepolarizată după ce radiația a trecut prin lama  $\lambda/4$ . Unghiul  $\eta$  poate fi determinat utilizând un polarizor după lama  $\lambda/4$ . Dacă direcția de transmitere a polarizorului este de-a lungul lui  $\eta$  sau  $\eta + \pi$  (față de axa  $\hat{i}$ ), intensitatea va prezenta valoarea maximă:

$$\Phi_{\max} = \Phi_{\text{pol}} + \frac{\Phi_{\text{nepol}}}{2}$$

Dacă direcția de transmitere maximă este de-a lungul direcției  $\eta + \frac{\pi}{2}$ , intensitatea va prezenta valoarea minimă:

$$\Phi_{\min} = \frac{\Phi_{\text{nepol}}}{2}$$

Gradul de polarizare va fi:  $P = \frac{\Phi_{\max} - \Phi_{\min}}{\Phi_{\max} + \Phi_{\min}}$ , iar densitatea spectrală

totală de flux:

$$\Phi_0 = \Phi_{\max} + \Phi_{\min}$$

### Cap. III

## PROPAGAREA RADIAȚIILOR OPTICE PRIN MEDIUL MATERIAL.

### 1. Ecuațiile Maxwell într-un mediu material.

Propagarea radiațiilor optice prin mediul material este descrisă de ecuațiile Maxwell:

$$(1.1) \quad \begin{aligned} (a) \quad \nabla \times \mathbf{e} &= -\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} & (c) \quad \nabla \cdot \mathbf{e} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ (b) \quad \nabla \times \mathbf{b} &= \mu_0 \mathbf{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial t} & (d) \quad \nabla \cdot \mathbf{b} &= 0 \end{aligned}$$

unde  $\rho$  reprezintă densitatea totală de sarcină electrică, iar  $\mathbf{j}$  - vectorul densității totale de curent electric. Densitatea totală de sarcină, ca și cea de curent, este constituită din doi termeni: unul corespunzător sarcinilor electrice libere (sau de conducție -  $\rho_c$ ), respectiv curenți liberi ( $\mathbf{j}_c$ ), iar celălalt este determinat de reacția substanței la acțiunea câmpului *em* perturbator ( $\rho_1, \mathbf{j}_1$ ). Pe de altă parte mărimile ce caracterizează câmpul *em* sunt determinate de aceleași sarcini și curenți, în acest mod obținându-se un sistem cuplat.

Sarcinile și curenții asociați sistemelor atomice constituente ale substanței prezintă discontinuități la scara atomică (pe distanțe de ordinul 1 Å). Din această cauză mărimile  $\mathbf{e}(\mathbf{r})$  și  $\mathbf{b}(\mathbf{r})$  vor prezenta variații foarte rapide atunci când punctul definit de vectorul de poziție  $\mathbf{r}$  va fi dispus în domeniul ocupat de sistemul atomic sau între sisteme. Valorile acestor mărimi, care caracterizează câmpul microscopic, nu pot fi observate cu ajutorul dispozitivelor actuale de măsură. Din această cauză se introduce noțiunea de *câmp macroscopic* caracterizat prin mărimile  $\bar{\mathbf{e}}$  și  $\bar{\mathbf{b}}$ , obținute prin



medierea câmpului microscopic pe un element de volum  $\Delta V$ , care din punct de vedere microscopic este mic, dar este mare față de dimensiunile sistemelor atomice, deci conține un număr mare de sisteme. În acest mod sunt netezite variațiile spațiale bruște ale câmpului microscopic, iar mărimile mediate sunt măsurabile cu dispozitivele de măsură actuale.

Dacă  $\Delta V = \int_V d^3 l$  reprezintă elementul de volum definit mai sus, intensitatea câmpului electric macroscopic este dată de relația:

$$\bar{e}(r) = \frac{1}{\Delta V} \int_V e(r+l) d^3 l,$$

unde vectorul  $r$  fixează punctul în care este centrat elementul de volum  $\Delta V$ , iar vectorul  $l$  generează acest element. O expresie asemănătoare este valabilă pentru inducția magnetică macroscopică:

$$\bar{b}(r) = \frac{1}{\Delta V} \int_V b(r+l) d^3 l.$$

În același mod se definește densitatea de sarcină macroscopică, respectiv densitatea de curent macroscopică:

$$\bar{\rho}_{\text{total}}(r) = \frac{1}{\Delta V} \int_V \rho(r+l) d^3 l$$

$$\bar{j}_{\text{total}}(r) = \frac{1}{\Delta V} \int_V j(r+l) d^3 l.$$

Aceste mărimi macroscopice măsurabile satisfac ecuațiile Maxwell.

Un domeniu microscopic al substanței poate conține o sarcină, respectiv o densitate de curent netă. Acestea sunt cunoscute sub denumirea de *sarcini libere* ( $\rho_c$ ), respectiv *curenți liberi* ( $j_c$ ), deosebite de *sarcinile legate* ( $\rho_l$ ), respectiv *curenții legați* ( $j_l$ ). De ex. un sistem atomic poate avea o sarcină cu care contribuie la densitatea de sarcină liberă. Însă, indiferent de prezența sau lipsa sarcinii libere, sistemul atomic, printr-o acțiune externă, poate fi polarizat, adică poate să prezinte în interiorul lui o separare relativă a sarcinilor pozitive (nucleele atomice) față de cele negative (electronii). Dacă  $r_j$  reprezintă vectorul de poziție față de centrul de masă al sarcinilor pozitive ( $q_j$ ), iar  $r_{-i}$  - același vector corespunzător sarcinilor negative ( $-q_{-i}$ ), atunci se poate defini momentul de dipol al sistemului:

$$(1.2) \quad p = \sum (q_j r_j - q_{-i} r_{-i}).$$

În general trebuie să se facă deosebire între momentul de *dipol electric permanent* și cel *indus*, determinat de deplasarea sarcinilor electrice într-un câmp electric extern.

Pentru a caracteriza substanța din punct de vedere microscopic, se introduce noțiunea de *moment mediu de dipol electric (polarizație)*, definit pentru unitate de volum:

$$(1.3) \quad P(R, t) = \frac{1}{\Delta V} \sum p_i(r, t) \quad \left( \frac{Cm}{m^3} = \frac{C}{m^2} \right).$$

"Sarcinile legate" reprezintă sarcina macroscopică existentă în substanță, determinată de prezența polarizației macroscopice  $P(R, t)$ . Dacă polarizația este constantă, fiecare element de volum microscopic conține același număr de sarcini legate pozitive și negative, deci densitatea de sarcini "legate" este egală cu zero ( $\rho_l = 0$ ). Dacă polarizația prezintă variații spațiale, adică depinde de punct  $P(R)$ , atunci densitatea de sarcini legate este diferită de zero ( $\rho_l \neq 0$ ), fiind determinată de polarizație prin intermediul relației:

$$(1.4) \quad \rho_l = -\nabla \cdot P(R, t).$$

"Curentul legat" este determinat de mișcarea "sarcinilor legate" în substanță, și este determinat de relația:

$$(1.5) \quad j_l = \frac{1}{\Delta V} \sum (q_j \dot{r}_j - q_{-i} \dot{r}_{-i}) = \frac{\partial P(R, t)}{\partial t},$$

în timp ce curentul de conducție este dat de relația:

$$j_c = \sigma e,$$

unde  $\sigma$  reprezintă conductivitatea substanței.

Pe baza acestor observații, relațiile (1.1) pot fi scrise sub forma:

$$(1.1') \quad \begin{aligned} a) \quad \nabla \times e &= -\frac{\partial b}{\partial t} & b) \quad \nabla \cdot e &= \frac{\rho_c}{\epsilon_0} - \frac{\nabla \cdot P}{\epsilon_0} \\ c) \quad \nabla \times b &= \mu_0 \sigma e + \mu_0 \frac{\partial P}{\partial t} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial e}{\partial t} & d) \quad \nabla \cdot b &= 0 \end{aligned}$$

Din punct de vedere fenomenologic, prezența substanței se manifestă prin modificarea mărimii fizice - *permittivitatea electrică* - caracteristică domeniului unde aceasta este prezentă. Deoarece prezența sistemelor atomice modifică legile de propagare ale câmpului *em* este necesar să se stabilească legătura dintre proprietățile microscopice ale substanței și această mărime macroscopică. Se va considera cazul substanțelor nemagnetice ( $\mu_r = 1$ ). Dacă este cunoscută mărimea sarcinilor libere ( $\rho_c$ ) și a curenților liberi ( $j_c$ ), precum și mărimea polarizației  $P(R, t)$  care determină mărimea sarcinilor și curenților legați, atunci sunt cunoscute toate sursele care determină mărimile  $e$  și  $b$ , deci aceste mărimi pot fi obținute prin integrarea ecuațiilor Maxwell.

Problema care apare constă în stabilirea legăturii dintre mărimea  $P(R, t)$  și caracteristicile substanței. Dacă considerăm că această mărime depinde numai de câmpul  $e(r, t)$  în punctul considerat (teoria locală), iar dependența celor două mărimi este liniară, atunci, fenomenologic se poate scrie relația:

$$(1.6) \quad \tilde{P}(r) = \tilde{\chi} \epsilon_0 e(r),$$

unde  $\tilde{\chi}$  reprezintă *susceptibilitatea electrică*, o mărime complexă caracteristică substanței, care stabilește legătura dintre câmpul electric și polarizația determinată de acesta.

În relația (1.6), mărimea  $\tilde{\chi}$  este adimensională; uneori relația (1.6) este prezentată sub forma:  $\tilde{P}(r) = \tilde{\chi} e(r)$ , mărimea  $\tilde{\chi}$  având dimensiunile permitivității electrice.

Presupunem un ansamblu de sisteme atomice, lipsite de moment de dipol electric permanent, dar cărora li se poate induce un moment de dipol sub acțiunea câmpului electric extern. Un asemenea ansamblu constituie un *mediu nepolar*. Momentul de dipol indus sub acțiunea câmpului electric extern este dat de relația (I 4.12):

$$p_i = \tilde{\alpha} E_m(r_i),$$

unde  $E_m(r_i)$  reprezintă intensitatea câmpului electric în centrul de masă al sistemului atomic  $i$ . Această mărime poate fi considerată constantă pe domeniul de extindere al sistemului atomic. Câmpul microscopic local  $E_m(r_i)$  depinde nu numai de poziția  $(r_i)$  a punctului, ci este determinat atât de prezența celorlalte sisteme atomice cât și de mărimea și orientarea dipolilor induși de câmp în aceste sisteme. Dacă se mediază câmpul microscopic pe elementul de volum  $\Delta V$  se obține câmpul local mediu  $E_1(r)$ , care acționează asupra sistemului atomic considerat. Câmpul local  $E_1(r)$  se deosebește de câmpul macroscopic  $E(r)$  care reprezintă media câmpurilor microscopice extinse asupra tuturor pozițiilor din volumul elementar considerat nu numai asupra poziției ocupate de sistemul atomic.

## 2. Susceptibilitatea electrică a ansamblului de sisteme atomice.

Pentru a rezolva această problemă este necesar pe de o parte să se introducă un model pentru sistemul atomic, pe baza căruia să se calculeze polarizabilitatea  $\tilde{\alpha}$  a sistemului, iar pe de altă parte să se stabilească legătura dintre câmpul macroscopic  $E$  și câmpul local  $E_1$ .

Un model al unui sistem atomic nepolar este reprezentat de dipolul electric liniar oscilant amortizat (modelul Lorentz). Pentru acest model, în prg. I 4.2, s-a stabilit relația (I 4.3):

$$\tilde{p}(\omega) = \tilde{\alpha} \tilde{E}_m(\omega) = -i \frac{e^2}{m_e \gamma_0 \omega_0} \frac{1}{1 + i \frac{\omega - \omega_0}{\gamma_0/2}} \tilde{E}_m(\omega),$$

unde  $\tilde{E}_m(\omega)$  reprezintă intensitatea câmpului electric microscopic care acționează asupra dipolului. Polarizația, care reprezintă media momentului de dipol electric pe unitate de volum, va fi:

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \tilde{P}(\omega) &= n_v \langle \tilde{p}(\omega) \rangle = n_v e \langle \tilde{r} \rangle = n_v \tilde{\alpha}(\omega) \tilde{E}_m(\omega) = \\ &= -i \frac{n_v e^2}{m_e \gamma_0 \omega_0} \frac{1}{1 + i \frac{\omega - \omega_0}{\gamma_0/2}} \tilde{E}_1(\omega) \end{aligned}$$

unde  $n_v$  reprezintă numărul mediu de dipoli din unitatea de volum, iar  $\tilde{E}_1(\omega)$  intensitatea câmpului mediu ce acționează asupra dipolului.

Aprecierea câmpului local depinde de caracteristicile mediului considerat. Pentru simplificare se consideră un ansamblu de dipoli relativ diluat astfel încât dipolii să influențeze puțin mărimea intensității câmpului excitator. În aceste condiții se poate considera  $\tilde{E}_1(R, \omega) = \tilde{E}(R, \omega)$ , iar polarizația unui asemenea ansamblu de dipoli este:

$$(2.2) \quad \tilde{P}(\omega) = \tilde{\chi}(\omega) \epsilon_0 \tilde{E}(\omega) = i \frac{n_v e^2}{m_e \gamma_0 \omega_0} \frac{1}{1 + i \frac{\omega - \omega_0}{\gamma_0/2}} \tilde{E}(\omega),$$

de unde:

$$(2.3) \quad \tilde{\chi}(\omega) = i \frac{n_v e^2}{m_e \epsilon_0 \gamma_0 \omega_0} \frac{1}{1 + i \frac{\omega - \omega_0}{\gamma_0/2}}.$$

Susceptibilitatea fiind o mărime complexă, se poate scrie:

$$\tilde{\chi}(\omega) = \chi'(\omega) + i\chi''(\omega) =$$

$$= \frac{n_v e^2}{m_e \epsilon_0 \gamma_0 \omega_0} \left[ \frac{\frac{\omega - \omega_0}{\gamma_0/2}}{1 + \left( \frac{\omega - \omega_0}{\gamma_0/2} \right)^2} + i \frac{1}{1 + \left( \frac{\omega - \omega_0}{\gamma_0/2} \right)^2} \right]$$

Factorul din fața parantezei, folosind (I 6.1, I 7.6), poate fi scris sub forma:

$$\frac{n_v e^2}{m_e \epsilon_0 \gamma_0 \omega_0} = \frac{n_v 6\pi c^3 e^2 \omega_0}{\omega_0^3 \Delta \omega_0 6\pi m_e c^3 \epsilon_0} = \frac{3 n_v \lambda_0^3}{m_e 2\pi^2 \Delta \omega_0 T_1},$$

unde produsul  $\Delta \omega_0 T_1 = 2$ , dacă dipolii ansamblului pot fi considerați liberi. În general această mărime este mai mare decât doi și determină micșorarea valorii maxime a susceptibilității.

Partea imaginară și cea reală a susceptibilității complexe este de forma:

$$(2.4 a) \quad \chi''(\omega) = -\frac{n_v}{\epsilon_0} \frac{\pi e^2}{2 m_e \omega_0} \frac{2}{\pi \Delta \omega_0} \frac{1}{1 + \left( \frac{\omega - \omega_0}{\gamma_0/2} \right)^2} =$$

$$= \frac{n_v}{\epsilon_0} \alpha''(\omega) = \chi''(\omega_0) g_0(\omega, \omega_0)$$

$$(2.4 b) \quad \chi'(\omega) = -\frac{n_v}{\epsilon_0} \alpha'(\omega) = \chi'(\omega_0) \frac{\omega - \omega_0}{\gamma_0/2} g_0(\omega, \omega_0),$$

$$\text{unde: } \chi''(\omega_0) = -\frac{n_v}{\epsilon_0} \frac{\pi e^2}{2 m_e \omega_0}, \text{ iar funcția } g_0(\omega, \omega_0) \text{ este normată.}$$

Din ecuațiile Maxwell se poate obține ecuația de propagare (fundamentală) a câmpului  $em$ . Dacă se aplică operatorul  $(\nabla \times)$  ecuației (1.1'a), folosind ecuația (1.1'c) și identitatea vectorială:

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{e}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{e}) - \nabla^2 \mathbf{e}, \text{ se obține:}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{e}) = -\nabla \times \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{b}) =$$

$$= \mu_0 \sigma \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial t} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{e}}{\partial t^2} - \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2}, \text{ sau:}$$

$$(2.5) \quad -\nabla^2 \mathbf{e} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{e}) + \mu_0 \sigma \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial t} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{e}}{\partial t^2} - \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2} = 0.$$

Relația (2.5) reprezintă o ecuație cu derivate parțiale având variabile independente mărimile  $(x, y, z)$  și  $t$ . Ea descrie dependența intensității câmpului electric de caracteristicile substanței. Deoarece direcția de acțiune a intensității componente electrice a câmpului  $em$ , este perpendiculară la direcția de propagare, este îndeplinită condiția:

$$(2.6) \quad \nabla \cdot \mathbf{e} = \frac{\partial}{\partial x} e_x + \frac{\partial}{\partial y} e_y + \frac{\partial}{\partial z} e_z = 0.$$

În cele ce urmează se poate întâlni cazul în care un mediu este dopat cu sisteme atomice (dipoli electrici). Prin urmare la interacțiunea câmpului  $em$  cu dipolii electrici de dopaj trebuie considerată influența caracteristicilor mediului dopat ( $\tilde{\epsilon}$ ) asupra câmpului, iar expresia polarizației dipolilor de dopaj determinată de acțiunea câmpului  $em$  (1.6) devine:

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}, t) = \tilde{\chi} \tilde{\epsilon} \mathbf{e}(\mathbf{r}, t).$$

În aceste condiții, considerând și observația (2.6), ecuația (2.5) devine:

$$(2.7) \quad \nabla^2 \mathbf{e} - \mu_0 \sigma \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial t} - \mu_0 \tilde{\epsilon} \frac{\partial^2 \mathbf{e}}{\partial t^2} - \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2} = 0.$$

Considerăm drept soluție a acestei ecuații o expresie de forma:

$$(2.8) \quad \mathbf{e}(z, t) = E_0 \cos(\omega t - \Gamma z) = \tilde{E}(z) e^{i\omega t} = \tilde{E}_0 e^{-\Gamma z} e^{i\omega t} + cc,$$

adică elongația câmpului electric depinde atât de coordonatele spațiale cât și de variabila temporală. Această expresie descrie o undă armonică, plană, ce se propagă de-a lungul direcției  $z$ , iar mărimea  $\Gamma$  reprezintă o constantă nedeterminată. Mărimea  $E_0$  nu depinde de variabilele  $t$  și  $z$ , ea fiind dispusă în planul  $(x, y)$ .

În aceste condiții ecuația (2.5) conduce la relația:

$$(-\Gamma^2 + i\mu_0 \sigma \omega - \mu_0 \tilde{\epsilon} \omega^2 - \mu_0 \tilde{\epsilon} \chi'' \omega^2) \tilde{E}_0 e^{-\Gamma z} e^{i\omega t} = 0,$$

de unde:

$$(2.9) \quad \Gamma = \pm \omega \sqrt{\mu_0 \tilde{\epsilon}} \left\{ 1 + \chi'(\omega) - i \left[ \frac{\sigma}{\tilde{\epsilon} \omega} - \chi''(\omega) \right] \right\}^{1/2}.$$

Prin urmare expresia (2.8) reprezintă o soluție a ecuației de undă dacă mărimea  $\Gamma$  satisface relația (2.9). Semnul  $(\pm)$  corespunde undelor progresive ce se propagă în sensul pozitiv, respectiv negativ al direcției  $z$ .

Dacă în expresia (2.9) termenul care se adaugă unității este mic, atunci aceasta poate fi dezvoltată în serie:

$$(2.10) \quad \Gamma \cong \pm i \omega \sqrt{\mu_0 \tilde{\epsilon}} \left\{ 1 + \frac{\chi'(\omega)}{2} - i \left[ \frac{\sigma}{2 \tilde{\epsilon} \omega} - \frac{\chi''(\omega)}{2} \right] \right\} =$$

$$= \pm \{ a_0(\omega) - a_m(\omega) \} + i \{ k(\omega) + k_m(\omega) \}$$

unde:

$$k(\omega) = \omega \sqrt{\mu_0 \tilde{\epsilon}}, \text{ respectiv: } k_m(\omega) = \omega \sqrt{\mu_0 \tilde{\epsilon}} \frac{\chi'(\omega)}{2} = k(\omega) \frac{\chi'(\omega)}{2},$$



$$a_0(\omega) = \frac{\sigma}{2} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon}}, \text{ respectiv.}$$

$$a_m(\omega) = \omega \sqrt{\mu_0 \varepsilon} \frac{\chi''(\omega)}{2} = k(\omega) \frac{\chi''(\omega)}{2}.$$

Intensitatea componentei electrice a câmpului  $em$  care se propagă în sensul pozitiv al direcției  $z$  într-un ansamblu de dipoli electrice dopat cu dipoli caracterizați prin frecvența proprie de oscilație ( $\omega_0$ ) este:

$$(2.11) \quad e(z, t) = E_0 \exp\{-[a_0(\omega) - a_m(\omega)]z\} \exp\{i[\omega t - (k(\omega) + k_m(\omega))z]\}.$$

Relația:

$$k(\omega)z = \omega \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0 \varepsilon_r} z = \frac{\omega}{c/n} z = \frac{\omega}{v_f} z = \frac{2\pi n}{\lambda_0} z = k_0 n z,$$

descrie variația fazei câmpului  $em$  la propagarea acestuia prin mediul caracterizat prin

indicele de refracție  $n$  (fără sisteme de dopaj), iar relația:  $k_m(\omega)z = k(\omega) \frac{\chi''(\omega)}{2} z$

descrie contribuția la această variație a interacțiunii dintre câmpul  $em$  și dipolii electrice de dopaj. Mărimea acestei contribuții are un caracter rezonant, fiind determinată de conturul funcției  $\chi''(\omega)$  a răspunsului dipolilor.

Mărimea:  $a_0(\omega)z = \frac{\sigma}{2} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon}} z$  depinde de conductivitatea mediului considerat și determină atenuarea câmpului  $em$  la propagarea acestuia datorită interacțiunii cu sarcinile libere (pierderi ohmice), iar mărimea:

$a_m(\omega)z = k(\omega) \frac{\chi''(\omega)}{2} z$  determină variația amplitudinii câmpului datorită

interacțiunii de rezonanță a acestuia cu dipolii electrice de dopaj.

Dacă relația:

$$a_m(\omega) = -\frac{n_v \omega_0}{c/n} \frac{\pi e^2}{2m_e \omega_0 \varepsilon_0} \frac{2}{\pi \Delta \omega} \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega - \omega_0}{\Delta \omega/2}\right)^2}$$

se împarte la densitatea ( $n_v$ ) dipolilor ansamblului, se obține mărimea fizică:

$$(2.12) \quad \sigma(\omega) = \frac{a_m(\omega)}{n_v} = \frac{\omega_0}{c/n} \frac{\pi e^2}{2m_e \omega_0 \varepsilon_0} \frac{2}{\pi \Delta \omega} \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega - \omega_0}{\Delta \omega/2}\right)^2},$$

denumită *secțiune transversală de absorbție*. Această mărime descrie capacitatea de interacțiune a unui dipol al ansamblului cu câmpul  $em$  și prezintă un caracter rezonant al variației cu frecvența.

Mărimea ( $\sqrt{\mu/\varepsilon}$ ) are dimensiunile unei rezistențe și reprezintă impedanța caracteristică a mediului pentru unda plană. În cazul vidului se obține:  $\sqrt{\mu_0/\varepsilon_0} = 377\Omega$ .

În cazul analizei propagării câmpului  $em$  în vid ( $\sigma = 0$ ,  $n = 1$ ,  $\tilde{\chi}(\omega) = 0$ ) ecuația de propagare are forma:

$$(2.13) \quad \nabla^2 e(z, t) - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 e(z, t)}{\partial t^2} = 0,$$

iar intensitatea câmpului electric este:

$$(2.14) \quad e(z, t) = \tilde{E}_0 e^{i[\omega t - k(\omega)z]}$$

Mărimea  $\omega/k$  trebuie să prezinte dimensiunile unei viteze, deci:  $v_f = \frac{\omega}{k} = c$ , adică

viteza de propagare în vid a fazei câmpului  $em$  este egală cu  $c$  (viteza de propagare în vid a radiațiilor optice).

În cazul analizei propagării câmpului  $em$  într-un ansamblu de dipoli electrice, dispuși în vid, caracterizați prin frecvența proprie  $\omega_0$ , trebuie considerat:  $n = 1$ ,  $\sigma \neq 0$  și  $\tilde{\chi}(\omega) \neq 0$ , deci ecuația de propagare are forma (2.7), iar intensitatea câmpului electric este descrisă de relația (2.11). Viteza de propagare a fazei câmpului  $em$  va fi dată de relația:

$$(2.15) \quad v_f = \frac{\omega}{k_{total}} = \frac{\omega}{k_0 \left[1 + \frac{\chi''(\omega)}{2}\right]} = \frac{c}{1 + \frac{\chi''(\omega)}{2}} = \frac{c}{n_a(\omega)},$$

unde:  $n_a(\omega) = 1 + \frac{\chi''(\omega)}{2}$  reprezintă indicele de refracție al ansamblului considerat.

Din cele prezentate mai sus reiese că partea imaginară a susceptibilității electrice ( $\chi''(\omega)$ ) descrie atenuarea câmpului  $em$  la propagarea acestuia prin ansamblul considerat (creșterea intensității câmpului în cazul dispozitivelor laser). Dipolii electrice sub acțiunea câmpului  $em$  de frecvență  $\omega$  centrată în jurul frecvenței proprii de oscilație, intră în oscilații forțate. Ca rezultat ei radiază câmp  $em$  sub formă de unde

secundare la frecvență egală cu frecvența excitatoare. Dacă dipolul este liber energia radiată este egală cu cea absorbită de la câmpul excitator (legea conservării energiei). În cazul ansamblului de dipoli energia radiată de către dipol este mai mică decât cea absorbită, diferența fiind transmisă celorlalte componente ale ansamblului, transformându-se în alte forme de energie.

Partea reală a susceptibilității ( $\chi'(\omega)$ ) determină variația suplimentară a fazei câmpului *em* la propagarea acestuia prin ansamblul. Dacă frecvența câmpului excitator coincide cu frecvența proprie de oscilație a dipolilor variația suplimentară este egală cu zero, însă variațiile fazei pentru frecvențe ale câmpului simetrice față de frecvența de rezonanță sunt egale și opuse ca semn.

Deoarece dipolii ansamblului nu interacționează, se poate considera că frecvențele de bază ale contururilor individuale de absorbție coincid, iar toate contururile sunt caracterizate prin aceeași lățime spectrală. În acest caz răspunsurile tuturor dipolilor ansamblului la acțiunea câmpului *em* armonic sunt identice. Conform relațiilor (2.4 a,b), răspunsul ansamblului de dipoli reprezintă suma răspunsurilor individuale. Lățimea spectrală a conturului mărimii  $\chi''(\omega)$  va fi egală cu cea a unui răspuns individual, iar ordonata mărimilor  $\chi'(\omega)$  și  $\chi''(\omega)$  la o frecvență dată va fi egală cu ordonata răspunsului individual la aceeași frecvență multiplicată cu densitatea de dipoli electrici ai ansamblului. În acest caz, dependența de frecvență mărimilor  $\chi'(\omega)$  și  $\chi''(\omega)$  este asemănătoare cu cea a mărimilor  $\alpha'(\omega)$  și  $\alpha''(\omega)$  reprezentate în fig. 6.

## Cap. IV

### MECANISME DE LĂȚIRE A STRUCTURII SPECTRALE A CÂMPULUI *EM* EMIS DE CĂTRE UN ANSAMBLU DE DIPOLI ELECTRICI.

Lățimea structurii spectrale a câmpului *em* emis de către un ansamblu de dipoli electrici este determinată pe de o parte de structura spectrală a semnalului emis de către dipol, iar pe de altă parte de mecanismele de interacțiune dintre dipoli.

#### 1. Ansamblu format din dipoli electrici liberi.

Acesta este un caz ideal în care se presupune că dipolii electrici sunt în repaus și nu interacționează între ei. Lățimea spectrală a câmpului emis este egală cu lățimea spectrală a câmpului emis de către un singur dipol, conform relației (I 6.11). Conform acestei relații, lățimea spectrală a câmpului *em* emis este determinată de faptul că amplitudinea oscilațiilor este dependentă de timp (lățirea apare ca un efect al transformării Fourier). Densitatea spectrală a fluxului emis de către ansamblu caracterizat prin densitatea  $n_v$  de dipoli, conform relației (I 16.12), este:

$$\begin{aligned} \Phi_{\text{total}}(\omega) &= \frac{2\pi E_0^2 n_v}{c\mu_0\Delta\omega_0\Delta t_0} \frac{2}{\pi\Delta\omega_0} \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega - \omega_0}{\Delta\omega_0/2}\right)^2} = \\ (I.1) \quad &= \frac{2\pi E_0^2 n_v}{c\mu_0\Delta\omega_0\Delta t_0} n_v g_L(\omega, \omega_0) \end{aligned}$$

## 2. Ansamblu format din dipoli electrici care pot interacționa prin ciocniri.

### 2.1 Structura spectrală a câmpului *em* emis de către acest ansamblu.

Ciocnirea unui dipol care se află în procesul de emisie cu un alt dipol, fragmentează câmpul *em* emis. Ciocnirile la care poate fi supus sistemul fizic considerat - dipolul electric - pot fi *elastice* și *neelastice*.

Ciocnirea se consideră elastică dacă în timpul acestui proces nu se modifică valoarea energiei momentane asociată mișcării oscilatorii interne a sistemului (în momentul ciocnirii nu se modifică valoarea amplitudinii oscilației). În cadrul acestui proces se modifică numai energia cinetică a sistemelor, însă în așa fel încât suma energiilor cinetice ale acestora înainte de ciocnire este egală cu cea de după ciocnire. Ciocnirile în care partenerii schimbă între ei cantități egale ale energiei lor interne, de asemenea sunt considerate elastice, deoarece nu se modifică energia internă proprie momentană. Deși ciocnirea elastică nu modifică energia internă momentană a sistemului, ea modifică în mod aleator faza mișcării oscilatorii (față de faza mișcării anterioare ciocniri sau față de faza câmpului *em* cu care interacționează).

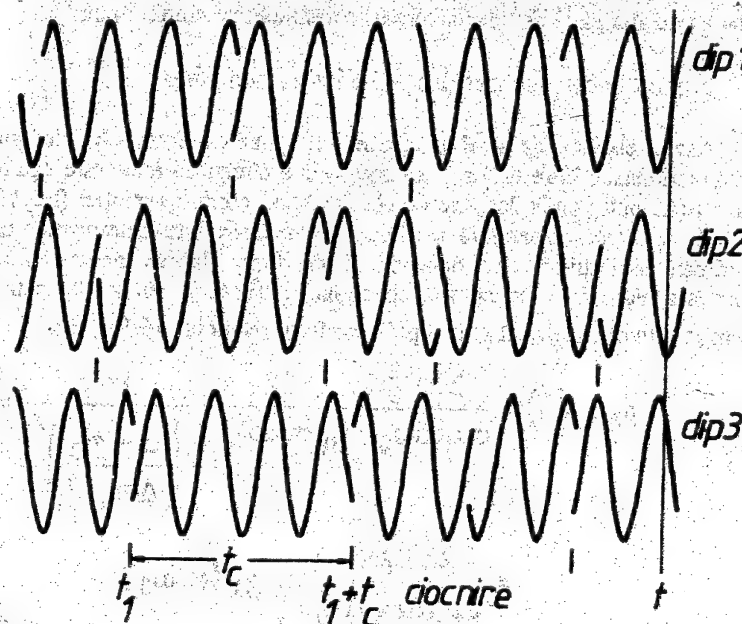


Fig. 34.

În cazul ciocnirii *neelastice* sistemul poate pierde momentan toată energia asociată mișcării interne oscilatorii sau o parte din ea (se modifică valoarea amplitudinii momentului de dipol oscilant). Energia pierdută poate fi transferată aceluiași sistem, mărirind energia cinetică a acestuia, partenerului de ciocnire tot sub formă de energie cinetică, peretelui incintei dacă sistemul se ciocnește cu acesta, sau să determine creșterea energiei interne asociată mișcării oscilatorii interne a partenerului de ciocnire. Prin urmare ciocnirea *neelastică*, pe lângă faptul că modifică în mod aleator faza mișcării oscilatorii interne față de cea anterioară ciocnirii, contribuie și la rata totală ( $\gamma$ ) de amortizare a mișcării interne. Într-un ansamblu de sisteme fizice de tipul celor considerate mai sus, cele două tipuri de ciocniri apar simultan, cu diferite rate, însă nu poate fi stabilită contribuția separată a acestora la procesul de defazare a mișcării oscilatorii interne. După ciocnire dipolul emițător reia procesul de emisie cu o fază diferită față de cea anterioară ciocnirii (fig. 34). Salturile de fază nu sunt corelate între ele; ele pot lua cu egală probabilitate orice valoare în intervalul  $(-\pi \div +\pi)$ .

Câmpul *em* emis de către un dipol electric amortizat în intervalul de timp  $t_c$  cuprins între două ciocniri ( $t_1$  reprezintă momentul primei ciocniri), conform relației (1 6.1), este descris de relația:

$$e_j = \text{Re}(\tilde{E}_{0j} e^{i\omega_0 t}) \quad \text{pentru } t_1 \leq t \leq t_1 + t_c$$

$$e_j = 0 \quad \text{pentru } t \leq t_1 \text{ și } t > t_1 + t_c$$

Câmpul *em* emis de către ansamblul de dipoli electrici considerat va fi de forma:

$$(2.1) \quad e(t) = \sum_{j=1}^N e_j(t) = \sum_{j=1}^N E_{0j} \cos(\omega_0 t + \varphi_j) = \text{Re}[E(t) e^{i\varphi(t)} e^{i\omega_0 t}],$$

Stabilirea expresiei funcției de distribuție spectrală a câmpului emis de către ansamblu, se poate face pe baza teoremei lui Wiener-Chinchine (vezi prg. II 3.3.2.1 cazul 3). Funcția normată de distribuție spectrală caracteristică câmpului *em* emis de către ansamblul considerat are forma:

$$(2.2) \quad g_c(\omega) = 2\pi \frac{2}{\pi \Delta\omega_c} \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega - \omega_0}{\Delta\omega_c/2}\right)^2}$$

Conform definiției, lățimea spectrală a acestei funcții este:

$$(2.3) \quad \Delta\omega_c = \frac{2}{T_2},$$

unde mărimea  $T_2$  reprezintă timpul mediu de ciocnire. Funcția normată a distribuției spectrale este reprezentată printr-un contur de tip Lorentz (de tipul celui prezentat în fig. 6 sau fig. 38).



În cazul unui ansamblu în stare gazoasă, din teoria cinetică a gazelor rezultă că valoarea timpului mediu de ciocnire poate fi apreciată din relația:

$$T_2 = \frac{\bar{\lambda}}{\bar{v}} = \frac{kT}{\sigma p} \sqrt{\frac{\pi m}{8kT}}, \text{ unde: } \bar{\lambda} = \frac{1}{\langle n \sigma \rangle} \text{ reprezintă lungimea drumului liber}$$

mediu de ciocnire,  $\sigma$  - secțiunea eficace de ciocnire,  $n = \frac{p}{kT}$  - numărul de dipoli din

unitate de volum, iar  $\bar{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$  - viteza termică medie a acestora. Din aceste relații rezultă:

$$(2.4) \quad T_2 \approx \frac{\sqrt{\pi mkT}}{16\sigma p} = \frac{\sqrt{mkT}}{16a^2 p \sqrt{\pi}},$$

unde:  $a$  - raza efectivă Bohr pentru sistemul atomic considerat, care este de ordinul de 1 Å. (Secțiunea transversală de ciocnire are dimensiunile unei arii și se raportează la aria unei sfere cu raza egală cu  $a$ . Pentru foarte multe gaze, valorile secțiunii transversale de ciocnire sunt în domeniul  $(0,1 \div 1) \cdot 10^{-18} \text{ m}^2$ ).

Pentru atomii de Ne ( $m_r = 20$ ) la presiunea  $p \approx 0,5 \text{ tor}$  (presiune tipică în laserul He-Ne) și la temperatura camerei, se obține  $T_2 \approx 0,6 \cdot 10^{-6} \text{ s}$ , iar lățimea conturului spectral este:

$$(2.5) \quad \Delta\nu_c = \frac{8}{\pi^{3/2}} \frac{\sigma p}{\sqrt{mkT}} \approx 0,53 \text{ MHz}.$$

Lățimea determinată de ciocniri este proporțională cu presiunea. La presiuni mici această lățire este mai mică decât cea radiativă (I 7.4). Însă la presiuni mari, de ordinul unei atmosfere (de ex. în cazul laserului cu  $\text{CO}_2$ ) ea reprezintă un mecanism principal de lățire a liniei spectrale (pentru  $p = 1 \text{ atm}$ , se obține  $T_2 = 0,4 \cdot 10^{-9} \text{ s}$  și  $\Delta\nu_c = 0,8 \cdot 10^9 \text{ Hz}$ ).

## 2.2 Interacțiunea cu radiația optică a ansamblului de dipoli electrici supuși ciocnirilor

Considerăm cazul unui ansamblu de dipoli, între care se produc ciocniri, supus acțiunii unui câmp *em* armonic exterior. Ciocnirile dintre dipoli determină defazarea întâmplătoare a mișcării oscilatorii.

Conform celor analizate în prg. I 4.2, sub acțiunea câmpului *em* armonic, după un interval de timp, se instaurează un regim staționar de oscilație caracterizat printr-o

valoare dată a amplitudinii (datorită transferului de energie) și a fazei față de faza câmpului perturbator. După fiecare ciocnire (defazare) câmpul perturbator tinde să readucă oscilația la regimul staționar. Prin urmare în ansamblul considerat se manifestă două tendințe: una de defazare, iar celaltă, determinată de câmp, de ordonare. Considerând caracterul statistic al ciocnirilor să stabilim expresia mărimilor  $\chi'(\omega)$  și  $\chi''(\omega)$ .

Fie  $x(t)$  - valoarea elongației unui dipol la momentul  $t$ ; acesta a fost supus ultimei ciocniri la momentul  $t_0$ , iar după ciocnire a reluat mișcarea oscilatorie forțată având fazorul elongației inițiale  $\tilde{X} = X_0 e^{i\varphi}$  (fig. 35). Elongația la momentul  $t$ , care reprezintă soluția generală a ecuației de mișcare, conține atât termenul care descrie starea staționară cât și pe cel care descrie starea tranzitorie. Ea depinde atât de  $t_0$  și  $\tilde{X}_0$ , cât și de fazorul câmpului *em* armonic aplicat și este de forma:

$$(2.6) \quad x(t; t_0, \tilde{X}_0) = \tilde{X}(\omega) e^{i\omega t} + [\tilde{X}_0 - \tilde{X}(\omega) e^{i\omega t_0}] e^{\left(-\frac{\gamma_0}{2} + i\omega_0\right)(t-t_0)}$$

(Conform acestei relații, la momentul inițial  $t = t_0$  se obține  $x(t) = \tilde{X}_0$  iar pentru  $t \gg t_0$ , al doilea termen tinde la zero, elongația descriind regimul staționar al oscilațiilor forțate).

Considerăm numărul de dipoli electrici  $n_v$  din unitate de volum la momentul  $t$ . Dipolii au suferit ultima ciocnire la momente  $t_0$  diferite, iar după ciocnire și-au reluat mișcarea oscilatorie cu fazori  $\tilde{X}(t_0)$  diferiți. Pentru a stabili expresia susceptibilității ansamblului format din  $n_v$  dipoli acesta trebuie caracterizat printr-o mișcare medie. În acest scop este necesar să se stabilească răspunsul mediu al dipolilor la un moment dat  $t$ , prin aceasta înțelegând medierea pentru valori diferite ale momentului ultimei ciocniri  $t_0$  și pentru fazori inițiali diferiți.

Fazorul inițial conține informații asupra fazei și amplitudinii inițiale a unui dipol imediat după ciocnire. Deoarece după ciocnire fazele diferiților dipoli sunt distribuite cu egală probabilitate în intervalul  $(0 \div 2\pi)$  rad, iar elongațiile inițiale sunt distribuite cu egală probabilitate între zero și valoarea maximă, valoarea medie a fazorilor inițiali extinsă la toți dipolii ansamblului, este egală cu zero. Prin urmare relația (2.6) devine:

$$(2.7) \quad x_m(t; t_0) = \tilde{X}(\omega) \left[ e^{i\omega t} - e^{i\omega t_0} e^{\left(-\frac{\gamma_0}{2} + i\omega_0\right)(t-t_0)} \right]$$

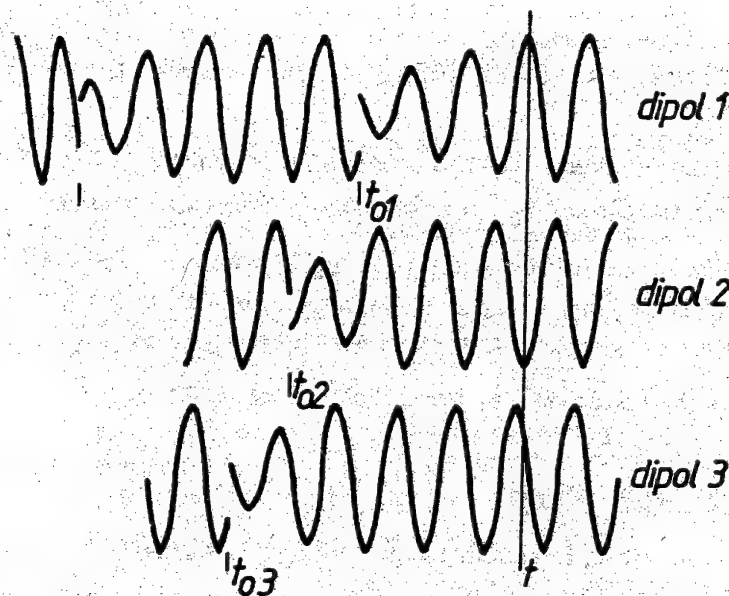


Fig. 35

Să calculăm elongația medie a componentelor ansamblului, medierea fiind extinsă asupra momentului ultimei ciocniri ( $t_0$ ). În acest scop elongația  $x_m(t; t_0)$  a unui dipol a cărui ultimă ciocnire a avut loc în intervalul  $t_0 \div t_0 + \Delta t_0$ , se raportează la numărul de dipoli  $\Delta n(t_0)$  a căror ultimă ciocnire a avut loc în intervalul  $\Delta t_0$  și se mediază pe valorile  $t_0$  anterioare lui  $t$ , adică:

$$(2.8) \quad x(t) = \frac{\sum_{t_0 < t} x(t; t_0) \Delta n(t_0)}{\sum_{t_0 < t} \Delta n(t_0)} = \frac{\int_{-\infty}^t x(t; t_0) d n(t_0)}{\int_{-\infty}^t d n(t_0)} =$$

$$= \frac{\int_{-\infty}^t \frac{n_v e^{-\frac{t-t_0}{T_2}}}{T_2} \tilde{X}(\omega) \left[ e^{i\omega t} - e^{i\omega t_0} e^{\left(-\frac{\gamma_0 + i\omega_0}{2}\right)(t-t_0)} \right] dt_0}{\int_{-\infty}^t \frac{n_v e^{-\frac{t-t_0}{T_2}}}{T_2} dt_0} =$$

$$= \tilde{X}_m(\omega) e^{i\omega t} \quad \text{pentru } -\infty < t_0 \leq t,$$

unde:

$$\tilde{X}_m(\omega) = \tilde{X}(\omega) \frac{1 + \frac{2i(\omega - \omega_0)}{\gamma_0}}{\left(1 + \frac{2}{\gamma_0 T_2}\right) \left[1 + \frac{2i(\omega - \omega_0)}{\gamma_0 + \frac{2}{T_2}}\right]} =$$

$$= i \frac{e}{m_e \omega \left(\gamma_0 + \frac{2}{T_2}\right) \left[1 + \frac{2i(\omega - \omega_0)}{\gamma_0 + \frac{2}{T_2}}\right]} = \tilde{E}(\omega)$$

Expresia susceptibilității ansamblului de dipoli (III 2.4) devine:

$$\chi''(\omega) = - \frac{n_v e^2}{m_e \epsilon_0 \omega_0 \Delta \omega} \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega - \omega_0}{\Delta \omega/2}\right)^2} =$$

$$(a) \quad = - \frac{n_v}{\epsilon_0} \frac{\pi e^2}{2 m_e \omega_0} \frac{2}{\pi \Delta \omega} \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega - \omega_0}{\Delta \omega/2}\right)^2} = \frac{n_v}{\epsilon_0} \frac{\pi e^2}{2 m_e \omega_0} g(\omega);$$

$$(2.9) \quad (b) \quad \chi'(\omega) = \frac{n_v}{\epsilon_0} \frac{\pi e^2}{2 m_e \omega_0} \frac{\omega - \omega_0}{\Delta \omega/2} g(\omega).$$

Pentru ansamblul considerat, forma conturului de absorbție este de tip Lorentz. Datorită defazării întâmplătoare a elongației inițiale determinată de ciocniri apare o lățire a conturului, noua lățime:

$$(2.10) \quad \Delta\omega = \Delta\omega_0 + \Delta\omega_c,$$

fiind determinată de suma dintre lățimea naturală și lățimea de ciocniri. Deoarece forma conturului este normată, lățimea acestuia este însoțită de micșorarea valorii maxime calculate la frecvența  $\omega = \omega_0$ . Conform relației (2.4), contribuția lățimii determinată de ciocniri la lățimea totală depinde de presiunea gazului.

Deoarece datorită ciocnirilor distribuția fazelor, respectiv a elongației inițiale, se realizează cu probabilitate egală în intervalul cuprins între  $(0 \div 2\pi)$  rad, respectiv zero și valoarea maximă a elongației, polarizația ansamblului supus ciocnirilor, în lipsa câmpului electric, tinde spre o valoare aproape egală cu zero.

### 2.3 Polarizația ansamblului de dipoli supus procesului de ciocnire

Conform celor prezentate în cap. III, substanța poate fi caracterizată prin mărimea fizică *moment mediu de dipol electric (polarizația)*, definită pentru unitate de volum. Polarizația substanței (III 1.3) implică compunerea vectorială a momentelor de dipol caracteristice componentelor elementare ale substanței. Dispunerea spațială reciprocă a acestora este fixată de proprietățile de simetrie ale ansamblului de dipoli, prin urmare polarizația substanței se va exprima printr-o mărime tensorială. În stare normală (în lipsa interacțiunii substanței cu câmpurile externe) polarizația poate fi egală cu zero (de ex. în cazul gazelor) sau poate fi diferită de zero (substanța prezintă o polarizație inițială proprie sau permanentă).

Sub acțiunea unui câmp electric extern, într-un ansamblu de dipoli poate fi indusă o anumită polarizație, care, pentru valori mici ale intensității câmpului, este dată de relația (III 1.6), unde mărimea  $\tilde{\chi}(\omega)$  - susceptibilitatea electrică, ca și polarizația, reprezintă o caracteristică a substanței (depinde de proprietățile de simetrie ale acesteia și se va exprima printr-o mărime tensorială).

Deoarece câmpul *em* radiat de către ansamblu de dipoli depinde de valoarea  $P(R, t)$  a polarizației la un moment dat, în continuare vom analiza câteva particularități ale acesteia. Conform prg. I 4.2, evoluția temporală a momentului de dipol electric ( $I$ ) supus acțiunii unui câmp electric dependent de timp este descrisă de ecuația (I 4.11), a cărei soluție este de forma:

$$p_{xi}(t) = |p_{x0i}(t_0)| \exp \left[ -\frac{\gamma}{2}(t - t_0) + i\omega_0(t - t_0) + i\varphi_i \right],$$

unde  $p_{x0i}$  reprezintă valoarea momentului de dipol la momentul inițial  $t_0$ ,  $\varphi_i$  valoarea fazei oscilației la același moment (faza inițială),  $\omega_0$  - frecvența proprie de oscilație, iar  $\gamma$  - factorul de amortizare.

Polarizația momentană reprezintă sumarea valorilor tuturor momentelor de dipol la momentul considerat. Deoarece, la momentul considerat, momentele de dipol prezintă faze diferite, pentru a realiza sumarea, se poate utiliza compunerea fazorială (pe axa orizontală, respectiv verticală este reprezentată partea reală, respectiv cea imaginară a fazorului sau partea *cos*, respectiv *sin* a oscilației). De ex., componenta polarizației după direcția  $x$  va fi de forma:

$$P_x(t) = \sum_{i=1}^{n_v} p_{xi}(t).$$

Dacă presupunem că toți dipolii din unitatea de volum încep să oscileze la momentul  $t_0$  cu aceeași frecvență și fază inițială ( $\varphi_0$ ), atunci polarizația va fi dată de expresia:

$$P_x(t) = n_v p_{x0} \exp \left[ \left( -\frac{\gamma}{2} + i\omega_0 \right) (t - t_0) + i\varphi_0 \right].$$

Polarizația ansamblului va depinde de frecvența proprie ( $\omega_0$ ) a dipolului individual, se va amortiza cu rata de amortizare  $\gamma$  dipolului individual, iar mărimea inițială ( $n_v p_{x0}$ ) va fi foarte mare deoarece s-a considerat că toți dipolii oscilează în fază (fig. 14a). Această situație este cunoscută sub denumirea de *ansamblu de dipoli care oscilează coerent* sau care sunt *complet aliniați*.

După cum s-a stabilit în prg. IV 2, prezența unui proces de defazare determină, după fiecare, interacțiune, modificări aleatoare ale fazei oscilației ( $\varphi_0$ ). În fig. 36b este prezentat rezultatul compunerii a patru fazori ai momentului de dipol defazați ca rezultat al acestor procese. Rezultă că procesele de ciocniri micșorează mărimea amplitudinii polarizației macroscopice. Procesul de micșorare a valorii polarizației determinată de defazare are loc independent de micșorarea valorii momentului de dipol individual, determinată de prezența proceselor radiative.

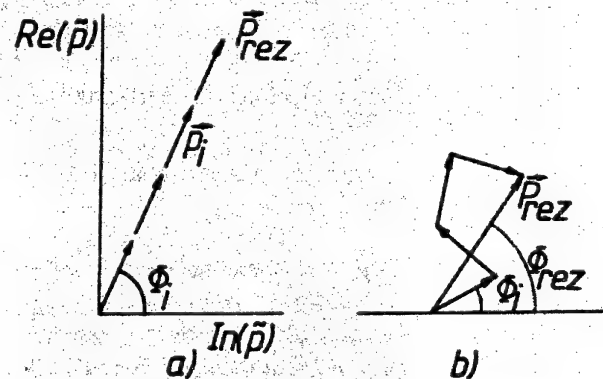


Fig. 36

Dacă valoarea densității dipolilor electrici este mare, deoarece fazele individuale sunt distribuite aleator cu egală probabilitate în domeniul  $(0 + 2\pi)$  rad al diferenței de fază, valoarea medie a polarizației este egală cu zero:

$$\langle P_x(t) \rangle = 0,$$

iar valoarea rădăcinii din media pătratelor (RMP):

$$\sqrt{\langle P_x^2(t) \rangle} = \sqrt{n_v} |p_{x1}(t)| \langle n_v | p_{x1}(t) \rangle,$$

va fi mult mai mică față de polarizația coerentă. Valoarea RMP a polarizației reprezintă zgomotul în cazul emisiei de dipol, a cărui corespondent, în cazul ansamblului de sisteme atomice este emisia spontană.

Să considerăm că la momentul inițial  $(t_0)$  numărul  $n_v(t_0)$  de dipoli oscilează în fază, deci polarizația inițială este:

$$P_x(t_0) = n_v(t_0) p_{x0}.$$

La un moment  $t > t_0$  dipolii ansamblului considerat pot fi divizați în două grupe:

- un număr  $n(t)$  de dipoli, a cărui valoare scade în timp, care nu au fost supuși la nici o ciocnire (la nici un proces de defazare). Aceștia continuă să oscileze în fază și le va corespunde polarizația macroscopică:

$$P_x(t) = n(t) p_{x0} = n(t) p'_{x0} \cos \omega_0 t.$$

Deoarece numărul dipolilor nedefazați (neciocniți) este dat de relația (II 3.3 22'), expresia polarizației macroscopice coerentă este:

$$P_x(t) = n_v \exp\left(-\frac{t-t_0}{T_2}\right) p_{x0} \exp\left[\left(-\frac{\gamma_0}{2} + i\omega_0\right)(t-t_0) + i\varphi_0\right] =$$

$$= P_{x0} \exp\left[-\left(\frac{\gamma_0}{2} + \frac{1}{T_2}\right)(t-t_0) + i\omega_0(t-t_0) + i\varphi_0\right],$$

adică rata descreșterii amplitudinii polarizației coerente este dată de mărimea  $\left(\frac{\gamma_0}{2} + \frac{1}{T_2}\right)$ , față de  $\left(\frac{\gamma_0}{2}\right)$  în cazul dipolului nesupus proceselor de defazare

(mărimea  $\gamma_0$  descrie amortizarea energiei prin procesul radiativ, în timp ce mărimea  $T_2$  este determinată de defazare).

- un număr de dipoli  $[n_v(t_0) - n(t)]$ , a cărui valoare crește în timp, care au fost supuși cel puțin la o ciocnire. Procesul de ciocniri a forțat dipoli să continue procesul de oscilație cu faze aleator distribuite. Aceștia vor determina o polarizație necoerentă, a cărei valoare medie, dacă numărul de dipoli este mare, tinde la zero, iar valoarea RMP, proporțională cu  $\sqrt{n_v(t_0) - n(t)} p'_{x0}$  este foarte mică.

Câmpul *em* aplicat ansamblului de dipoli considerat acționează ca un mecanism de ordonare coerentă care forțează dipolii individuali să intre în oscilație cu aceeași fază. Acesta determină o sumare "coerentă" a elongațiilor individuale și ca rezultat apariția unei polarizații macroscopice finite. Rezultatul concurenței dintre efectul ciocnirilor, măsurat de mărimea  $T_2$ , și efectul de ordonare determinat de câmpul *em* aplicat constă în lăpirea răspunsului ansamblului la câmpul aplicat, însoțită de micșorarea valorii maxime a acestuia.

În cazul câmpurilor *em* obișnuite, mărimea intensității câmpului electric este insuficientă pentru a realiza o ordonare apreciabilă în defavoarea efectului de defazare. Ca rezultat polarizația macroscopică a ansamblului considerat este mică față de valoarea care s-ar obține atunci când dipolii ar oscila în fază:  $\tilde{X}_m(\omega) \langle \tilde{X}(\omega) \rangle$  - unde  $\tilde{X}(\omega)$  reprezintă fazorul unui dipol electric când nu sunt prezente procesele de defazare. Această situație se manifestă în cazul dispozitivelor laser. Situații deosebite apar în cazul când ansamblul considerat este supus acțiunii unor pulsuri de câmp *em* de puteri foarte mari, în acest caz câmpul electric este capabil să realizeze o ordonare aproape completă a dipolilor electrici oscilanți și, ca rezultat, apar fenomene noi care fac obiectul opticii neliniare.

Din cele prezentate rezultă că polarizația indusă în substanță depinde de caracteristicile de corelare ale câmpului perturbator al radiației optice. Pentru a analiza acest lucru trebuie subliniat faptul că interacțiunea dintre câmp și ansamblul de sisteme cuantice se reduce la interacțiunea directă dintre un sistem cuantic și un foton al câmpului. Fazorul momentului de dipol indus în sistemul cuantic (respectiv fazorul câmpului elementar emis de către sistemul cuantic perturbat) depinde de fazorul câmpului *em* perturbator atașat fotonului.

Dacă câmpurile elementare atașate fotonilor nu sunt corelate (cazul radiației termice), atunci momentele de dipol induse în diferite sisteme cuantice de diferiți fotoni (respectiv câmpurile elementare emise) vor fi necorelate, iar valoarea gradului de coerență al câmpului emis de către ansamblu va tinde la zero.

Dacă pentru perturbarea ansamblului se folosește radiație de tip laser, aceasta prezintă o valoare a gradului de coerență, atât spațial cât și temporală, care se apropie de valoarea unu. Ca rezultat momentele de dipol induse în diferite sisteme cuantice vor fi corelate, atât spațial cât și temporal. În acest caz polarizația ansamblului prezintă caracteristici noi care se vor manifesta în caracteristicile câmpului radiat de ansamblu.

Într-un ansamblu de dipoli procesele de defazare acționează în sensul distrugerii polarizației coerente care ar putea apare în ansamblu. Procesele fizice care determină defazarea mișcării interne a unui dipol față de altul sunt:

- în gaze, sistemele atomice aflate într-o mișcare continuă suferă ciocniri elastice și neelastice. Ambele procese de ciocniri determină defazarea aleatoare a mișcării interne a sistemului atomic.

- în matricea solidă (matrice cristalină sau amorfă dopată cu sisteme atomice care prezintă tranziții atomice convenabile obținerii efectului laser), valoarea energiei nivelurilor sistemelor atomice ale ansamblului considerat, respectiv valoarea frecvenței tranziției, este perturbată de prezența sistemelor atomice vecine, deci depinde de distanța dintre sistemul atomic emițător și cel al matricei înconjurătoare. Acestă distanță este modulată de vibrațiile termice ale rețelei matricei deci frecvența tranziției este



perturbată în timp în mod aleator în jurul frecvenței sistemului atomic izolat. Acesta reprezintă așa numita *lărgire fononică*.

- în cazul unei matrice solidă dopată cu un număr mare de sisteme de dopaj, distanța dintre acestea se micșorează astfel încât se pot influența reciproc. Oscilațiile individuale ale sistemelor atomice active nu mai sunt total independente, ele devin cuplate prin așa numitul *cuplaj dipolar*. Acest cuplaj de asemenea tinde să determine defazarea mișcării oscilatorii. Efectul produs de către acest cuplaj, la rândul lui, este modulată aleator de către mișcarea termică a rețelei cristaline a matricei, care este mai intensă.

### 3. Lărgirea de tip Doppler a structurii spectrale a câmpului *em* emis de către un ansamblu de dipoli electrici.

Conturul Lorentz (conturul natural sau radiativ) poate fi observat numai folosind metode spectrale speciale, deoarece este deformat de alte efecte de lărgire. În cazul gazelor aflate la presiuni scăzute o contribuție principală revine efectului Doppler.

Dipolii electrici ai unui ansamblu aflat în stare de gaz prezintă o mișcare termică caracteristică ansamblului de particule aflat în echilibru termodinamic caracterizat prin temperatura  $T$ . Deoarece dipolii electrici, care reprezintă emițători sau receptori de radiație, sunt în mișcare apare o deplasare a frecvenței de emisie sau de absorbție (deci a întregului contur de emisie sau de absorbție) asociată mișcării. Deplasarea conturilor, ca și mișcarea dipolilor, va fi întâmplătoare și va determina lărgirea structurii spectrale a câmpului *em* emis de către ansamblu sau a domeniului spectral de interacțiune a ansamblului cu un câmp *em* exterior. Acest mecanism este cunoscut sub denumirea de *lărgire Doppler*. Efectul este de natură relativistă, dar se pot obține rezultate conforme cu determinările experimentale și printr-o tratare clasică.

#### 3.1 Structura spectrală a câmpului *em* emis de ansamblu.

Considerăm un dipol electric caracterizat prin viteza  $\mathbf{v}(v_x, v_y, v_z)$  măsurată în sistemul de referință al laboratorului. Sensul de deplasare formează unghiul  $\theta$  cu direcția de observare a câmpului *em* emis. Datorită efectului Doppler, frecvența câmpului emis de către dipolul în mișcare și înregistrată în sistemul fix al laboratorului este dată de relația:

$$(3.1) \quad \omega' = \omega_0 + \mathbf{k} \cdot \mathbf{v} = \omega_0 \left( 1 + \frac{\mathbf{v}}{c} \cos \theta \right) = \omega_0 \left( 1 + \frac{v_z}{c} \right) = \omega_0 + \delta\omega,$$

unde  $\omega_0$  reprezintă frecvența proprie de emisie a dipolului. Dacă dipolul se deplasează spre receptor ( $\theta = 0$ ) acesta înregistrează o frecvență mărită, dacă se deplasează în sens opus ( $\theta = \pi$ ) înregistrează o frecvență micșorată, iar dacă se deplasează

perpendicular pe direcția de observare ( $\theta = \frac{\pi}{2}$ ) receptorul nu înregistrează o variație a frecvenței (fig. 37 a).

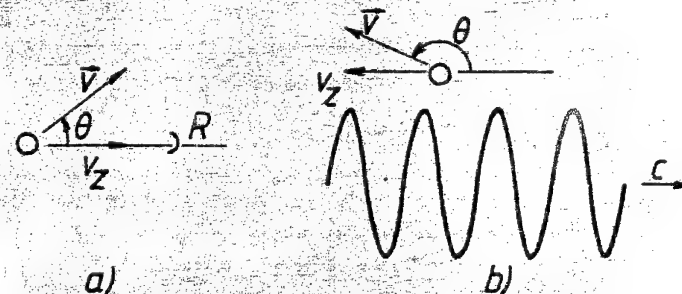


Fig. 37

Receptorul va înregistra frecvența de rezonanță deplasată a dipolului, iar odată cu frecvența de rezonanță este deplasat întreg conturul de emisie determinat de procesele de emisie și de ciocniri. Vitezele de deplasare ale dipolilor ansamblului sunt distribuite în mod aleator atât în mărime cât și în direcție. Densitatea de dipoli  $d n_v(v_z)$ , a căror viteză este cuprinsă în intervalul de viteze  $d v_z$  centrat în jurul componentei  $v_z$  a vitezei, este dat de legea de distribuție normată a lui Maxwell:

$$(3.2) \quad d n_v(v_z) = n_v \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} \exp\left(-\frac{m v_z^2}{2kT}\right) d v_z,$$

unde:  $-\infty < v_z < +\infty$ ,  $m$  - masa dipolului, iar  $T$  - temperatura asociată mișcării de translație caracteristică ansamblului aflat în echilibru termodinamic. Distribuția numărului de dipoli funcție de deplasarea frecvenței este dată de relația:

$$(3.3) \quad d n_v(\delta\omega) = n_v \sqrt{\frac{mc^2}{2\pi\omega_0^2 kT}} \exp\left(-\frac{mc^2(\omega' - \omega_0)^2}{2\omega_0^2 kT}\right) d(\delta\omega) = n_v g_D(\delta\omega) d(\delta\omega)$$

$$\text{unde: } \delta\omega = \omega' - \omega_0 = \frac{\omega_0}{c} v_z \text{ și } d v_z = \frac{c}{\omega_0} d(\delta\omega).$$

Fiecărui grup de dipoli electrici  $d n_v(v_z)$  îi va corespunde o densitate spectrală de flux deplasată în frecvență față de  $\omega_0$ , datorită efectului Doppler. Funcția spectrală de distribuție a câmpului *em* emis de către ansamblu va reprezenta

înfășurătoarea densităților spectrale de flux corespunzătoare fiecărui grup de dipoli. Lățimea spectrală a acestei funcții, conform definiției, este dată de:

$$\exp\left(-\frac{mc^2(\omega'_1 - \omega_0)}{2\omega_0^2 kT}\right) = \frac{1}{2}, \text{ de unde:}$$

$$(3.4) \quad \Delta\omega_D = 2(\omega'_1 - \omega_0) = \sqrt{\frac{8\omega_0^2 kT \ln 2}{mc^2}}$$

Folosind expresia lățimii spectrale Doppler, funcția de distribuție spectrală devine:

$$(3.5) \quad g_D(\delta\omega) = \frac{2}{\Delta\omega_D} \sqrt{\frac{\ln 2}{\pi}} \exp\left[-\left(\frac{\omega' - \omega_0}{\Delta\omega_D/2}\right)^2 \ln 2\right]$$

a cărei valoare maximă este:

$$(3.6) \quad g_{D\max} = \frac{2}{\Delta\omega_D} \sqrt{\frac{\ln 2}{\pi}} = \frac{0,932}{\Delta\omega_D}$$

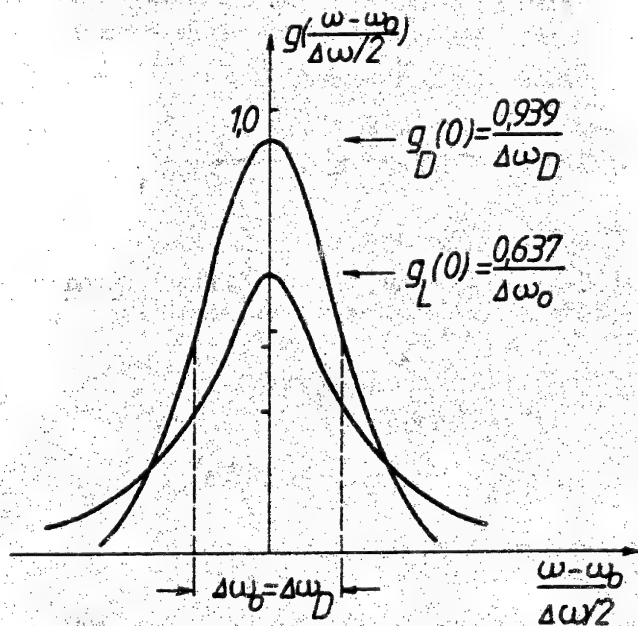


Fig. 38

Funcția  $g_D(\delta\omega)$  este de tip Gauss normată. Deoarece  $\Delta\omega_D \gg \Delta\omega$  (suma lățimii radiative și cea de ciocniri), valoarea maximă a funcției Gauss normate este mai mică decât valoarea maximă a funcției Lorentz normate  $g_L(0) = \frac{0,637}{\Delta\omega}$ .

Reprezentarea grafică a celor două funcții de distribuție spectrală normate, în așa fel încât lățimile spectrale ale acestora să fie marcate prin segmente de aceeași lungime, iar ariile delimitate de funcții să fie egale, este dată în fig. 38. Se observă că în timp ce conturul Lorentz este caracterizat printr-o descreștere lentă a "aripilor", conturul Gauss, după depășirea frecvențelor ce delimitează lățimea spectrală, se caracterizează printr-o descreștere rapidă spre zero. Răspunsul ansamblului de dipoli în apropierea frecvenței centrale este mult mai puternic în cazul conturului Gauss, față de cel Lorentz. Acceptând definiția lățimii spectrale prezentată anterior, în cazul conturului Gauss rămâne în afara lățimii un domeniu spectral în care răspunsul este suficient de intens. De aceea pentru definirea lățimii spectrale se consideră uneori drept limite frecvențele pentru care valoarea maximă a conturului se micșorează de  $e$  ori:

$$\Delta\omega_D = \sqrt{\frac{8\omega_0^2 kT}{mc^2}}$$

În cazul tranziției  $\lambda = 632,8 \text{ nm}$  a laserului He-Ne ( $m_r = 20$ ,  $T \cong 400 \text{ K}$ ) se obține  $\Delta\omega_D = 1,5 \text{ GHz}$  (față de  $\Delta\omega_L = 150 \text{ MHz}$ ), iar în cazul tranziției  $\lambda = 480 \text{ nm}$  a laserului ionic  $\text{Ar}^+$  se obține  $\Delta\omega_D = 6 \text{ GHz}$ , deoarece temperatura mediului activ este mult mai ridicată. În cazul tranziției  $\lambda = 10,6 \mu\text{m}$  a laserului  $\text{CO}_2$  ( $m_r = 44$ ,  $T \cong 300 \text{ K}$ ),  $\Delta\omega_D = 50 \text{ MHz}$ , valoarea lățimii se micșorează deoarece frecvența este mult mai mică, iar în cazul maserului  $\text{NH}_3$  ( $\nu_0 = 24,87 \text{ GHz}$ ,  $T \cong 300 \text{ K}$ ) se obține  $\Delta\omega_D = 70 \text{ kHz}$ , valoare care este de  $10^6$  ori mai mare decât lățimea naturală proprie.

### 3.2 Interacțiunea câmpului $em$ cu ansamblul de dipoli care prezintă efect Doppler.

Vom analiza cazul interacțiunii ansamblului de dipoli electrici aflat în echilibru termodinamic cu un câmp  $em$  armonic care se propagă după direcția  $z$  (fig. 37 b). Deoarece dipolul se deplasează prin câmpul undei, frecvența aparentă a acestuia ( $\omega'$ ), determinată în sistemul de referință al dipolului în mișcare este diferită de frecvența ( $\omega$ ) determinată în sistemul fix al laboratorului. Dacă este considerat fix, într-un interval de timp  $t$ , dipolul înregistrează un număr de oscilații ale undei dat de relația:

$N = \frac{ct}{\lambda} = vt$ . În același interval de timp, dacă dipolul se deplasează cu viteza  $V_z$ , numărul de oscilații înregistrat de acesta va fi:

$$N \pm \Delta N = \frac{ct \pm v_z t}{\lambda} = \left(1 \mp \frac{v_z}{c}\right) vt = v' t.$$

(Semnul " - " se referă la cazul deplasării în sensul de propagare al undei, iar semnul " + " la deplasarea în sens opus). Receptorul aflat în sistemul de referință al dipolului în mișcare înregistrează valoarea  $v'$  a frecvenței aparente.

Câmpul *em* armonic va interacționa cu dipolul electric în mișcare numai dacă frecvența de rezonanță ( $\omega_0$ ) (respectiv conturul de interacțiune) a acestuia va coincide cu frecvența aparentă:

$$(3.7) \quad \left(1 \mp \frac{v_z}{c}\right) \omega = \omega_0, \text{ deci: } \omega = \frac{\omega_0}{\left(1 - \frac{v_z}{c}\right)} \cong \left(1 + \frac{v_z}{c}\right) \omega_0 = \omega_0 + \delta\omega.$$

Prin urmare pentru undă *em* valoarea frecvenței de rezonanță (respectiv conturul de interacțiune) a dipolului în mișcare este deplasată cu mărimea:  $\delta\omega = \frac{v_z}{c} \omega_0$ .

Considerând interacțiunea dintre dipolii electrice ai unui ansamblu în stare de gaz, aflat în echilibru termodinamic, și câmpul *em* armonic ( $\omega$ ), să calculăm răspunsul acestuia la interacțiune, adică să determinăm expresiile mărimilor caracteristice  $\chi'(\omega)$  și  $\chi''(\omega)$ .

Susceptibilitatea electrică, la frecvența  $\omega$ , a ansamblului de dipoli care nu prezintă efect Doppler este:

$$\tilde{\chi}(\omega) = i\chi''(\omega_0) \frac{2}{\pi\Delta\omega} \frac{1}{1 + 2i \frac{\omega - \omega_0}{\Delta\omega}},$$

unde  $\Delta\omega$  reprezintă suma dintre lățimea radiativă și cea determinată de ciocniri. Contribuția unui singur dipol la mărimea susceptibilității este:

$$\tilde{\chi}'(\omega) = i \frac{\chi''(\omega_0)}{n_v} \frac{2}{\pi\Delta\omega} \frac{1}{1 + 2i \frac{\omega - \omega_0}{\Delta\omega}}$$

Răspunsul total al ansamblului la frecvența  $\omega$  va reprezenta suma răspunsurilor dipolilor care datorită deplasării conturului pot interacționa cu câmpul *em* exterior la frecvența considerată:

$$(3.8) \quad \tilde{\chi}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} i \frac{\chi''(\omega_0)}{n_v} \frac{2}{\pi\Delta\omega} \frac{1}{1 + 2i \frac{\omega - \omega_0}{\Delta\omega}} \times$$

$$\times n_v \sqrt{\frac{mc^2}{2\pi\omega_0^2 kT}} \exp\left(-\frac{mc^2(\delta\omega)^2}{2\omega_0^2 kT}\right) d(\delta\omega)$$

Relația (3.8) nu poate fi integrată direct, de aceea vor fi analizate cazurile extreme.

- lărgirea Doppler este neglijabilă:  $\langle \delta\omega^2 \rangle \ll (\Delta\omega)^2$ .

Lărgirea Doppler influențează foarte puțin lărgimea determinată de efectul radiativ și cel determinat de ciocniri. Factorul Gauss este foarte mic față de factorul Lorentz, de aceea se poate considera că acționează ca o funcțională- $\delta$ , prin urmare:

$$\tilde{\chi}(\omega) \propto i\chi''(\omega_0) \frac{2}{\pi\Delta\omega} \frac{1}{1 + 2i \frac{\omega - \omega_0}{\Delta\omega}}.$$

- lărgirea Doppler este foarte mare:  $\langle \delta\omega^2 \rangle \gg (\Delta\omega)^2$ .

Factorul Gauss este foarte mare față de factorul Lorentz, care determină răspunsul individual. Acesta poate fi considerat că acționează ca o funcțională- $\delta$ . Partea imaginară a susceptibilității, care descrie schimbul de energie dintre ansamblu și câmpul *em* excitator, este dată de relația:

$$\chi''(\omega) \propto \chi''(\omega_0) \sqrt{\frac{mc^2}{2\pi\omega_0^2 kT}} \exp\left(-\frac{mc^2(\omega - \omega_0)^2}{2\omega_0^2 kT}\right) \propto \chi''(\omega_0) g_D(\omega).$$

Răspunsul  $\chi''(\omega)$  la interacțiune al ansamblului este caracterizat printr-o funcție Gauss (3.5) a cărei lățime spectrală este dată de relația (3.6).

În ceea ce privește mărimea  $\chi'(\omega)$ , aceasta nu poate fi analizată analitic. Calculele numerice au arătat că forma acestei funcții, în cazul prezenței efectului Doppler, este asemănătoare cu cea obținută în cazul lipsei acestuia: se obțin două maxime opuse ca semn, localizate aprox. la frecvențele care delimitează lățimea spectrală, a căror valoare este aprox. egală cu jumătate din valoarea maximă mărimii  $\chi''(\omega)$ .

#### 4. Conturul spectral de tip Voigt

În prg. 2, respectiv prg. 3 au fost prezentate cazurile lărgirii determinate de procesele de ciocniri, respectiv lărgirea determinată de efectul Doppler. Dar aceste cauze nu pot fi separate, ele fiind prezente simultan. De aceea este necesar să se determine conturul spectral al radiației emise de către ansamblul de dipoli electrici considerând ambele cauze.

După cum s-a stabilit în prg. 3, odată cu deplasarea frecvenței de rezonanță datorită efectului Doppler, se deplasează întregul contur determinat de efectele radiative precum și cele de ciocniri.

Dacă  $\omega' = \omega_0 + \omega_0 \frac{v_z}{c}$  reprezintă frecvența de rezonanță a dipolului electric care se deplasează cu viteza  $v$ , atunci conturul Lorentz normalizat, determinat de ciocniri, va fi de forma:

$$(4.1) \quad g_L(\omega', \omega) = \frac{\Delta\omega}{2\pi} \frac{1}{\left[ \left( \omega_0 + \omega_0 \frac{v_z}{c} - \omega \right)^2 + \left( \frac{\Delta\omega}{2} \right)^2 \right]}$$

Conturul spectral al câmpului radiațiilor optice emise de către ansamblul considerat se va obține prin integrare asupra distribuției vitezelor (3.2):

$$(4.2) \quad g(\omega) = \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} \frac{\Delta\omega}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp\left(-\frac{mv_z^2}{2kT}\right)}{\left( \omega_0 + \omega_0 \frac{v_z}{c} - \omega \right)^2 + \left( \frac{\Delta\omega}{2} \right)^2} dv_z$$

Dacă se fac notațiile:

$$x = \sqrt{4 \ln 2} \frac{\omega_0 - \omega}{\Delta\omega_D} = 1,67 \frac{\omega_0 - \omega}{\Delta\omega_D}, \quad y^2 = \frac{mv_z^2}{2kT}$$

$$b = \sqrt{4 \ln 2} \frac{\Delta\omega_0/2}{\Delta\omega_D} = 1,67 \frac{\Delta\omega_0/2}{\Delta\omega_D}$$

$$\text{unde: } \Delta\omega_D = \left( \frac{8kT\omega_0^2 \ln 2}{mc^2} \right)^{1/2}$$

relația (4.2) poate fi scrisă sub forma:

$$(4.3) \quad g(\omega) = \frac{1}{\pi^{3/2}} \frac{b^2}{\Delta\omega/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(-y^2)}{(y+x)^2 + b^2} dy$$

Conturul spectral descris de relația (4.3) este cunoscut sub denumirea de conturul lui Voigt.

Valoarea mărării  $g(\omega)$  pentru o frecvență egală cu frecvența de rezonanță a dipolului în repaus ( $\omega_0$ ) (valoarea maximă), este dată de relația:

$$(4.4) \quad g(\omega_0) = \frac{1}{\pi^{3/2}} \frac{b^2}{\Delta\omega/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(-y^2)}{y^2 + b^2} dy$$

Integrala (4.4) poate fi scrisă sub forma:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(-y^2)}{y^2 + b^2} dy = \frac{\pi}{b} \exp(b^2) \operatorname{erfc}(b),$$

unde:  $\operatorname{erfc}(b) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-u^2) du$  reprezintă funcția complementară de erori,

valorile ei fiind date în tabele. Relația (4.4) devine:

$$(4.5) \quad g(\omega_0) = \sqrt{\frac{4 \ln 2}{\pi}} \frac{1}{\Delta\omega_D} \exp(b^2) \operatorname{erfc}(b)$$

Funcția  $\exp(b^2) \operatorname{erfc}(b)$ , pentru diferite valori ale mărării  $b$ , este reprezentată grafic în fig. 39. Mărimea  $g(\omega_0)$  depinde de raportul dintre lățimea lărgirii determinată de ciocniri și cea determinată de efectul Doppler.

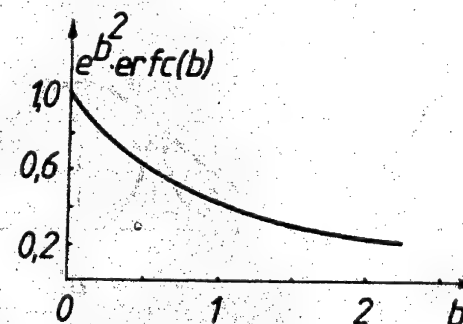


Fig. 39

- Dacă  $\Delta\omega \gg \Delta\omega_0$ , atunci  $b \gg 1$ , iar  $\exp(b^2) \operatorname{erfc}(b) \propto \frac{1}{\sqrt{\pi} b}$



Prin urmare:  $g(\omega_0) = \frac{2\Delta\omega}{\pi}$ , care coincide cu valoarea dată de relația (I 6.10).

Acesta este cazul "lărgirii determinate de ciocniri". În acest caz  $g(\omega, \nu)$  este foarte larg și variază lent față de distribuția gaussiană îngustă a vitezelor. Deoarece funcția Gauss este normată, aceasta acționează ca o funcțională- $\delta(\nu)$ , iar conturul Voigt se reduce la  $g(\omega, \nu = 0)$ , care reprezintă conturul tip Lorentz determinat de ciocniri (fig. 40 a).

- Dacă  $\Delta\omega \ll \Delta\omega_0$  (cazul "lărgirii determinate de efect Doppler"), atunci  $b \ll 1$ , iar  $\exp(b^2) \operatorname{erfc}(b) \cong 1$ , prin urmare:

$$g(\omega_0) = \frac{2}{\Delta\omega_D} \sqrt{\frac{\ln 2}{\pi}},$$

care coincide cu valoarea dată de relația (3.6). În acest caz conturul de ciocniri acționează ca o funcțională- $\delta\left(\omega_0 + \omega \frac{v_z}{c} - \omega_0\right)$ , iar conturul Voigt se reduce la conturul Doppler. Această condiție se realizează în majoritatea cazurilor experimentale, exceptând cazul presiunilor înalte sau cel al interacțiunii ansamblului de dipoli aflat în echilibru termodinamic cu un fascicul colimat de particule (fig. 40 b).

- Pentru valori arbitrare ale parametrului  $b$ , valoarea mării  $g(\omega_0)$  se obține conform relației (4.4), folosind valorile tabelate ale funcției  $\operatorname{erfc}(b)$ .

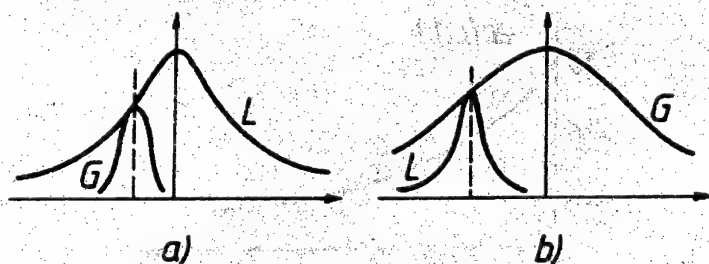


Fig. 40 a, b

- Pentru valori arbitrare atât ale parametrului  $b$  cât și ale frecvenței  $\omega$ , valorile conturului  $g(\omega)$  sunt date de relația (4.3), care poate fi evaluată folosind valorile tabelate ale funcției:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(-y^2)}{(y+x)^2 + b^2} dy = \frac{\pi}{b} \operatorname{Re} \left( \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(-y^2)}{y+x+ib} dy \right) = \frac{\pi}{b} \operatorname{Re} w(x+ib),$$

unde  $w$  reprezintă "funcția de erori cu argument complex". În acest caz conturul spectral Voigt este descris de relația:

$$g(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{b}{\Delta\omega_D/2} \operatorname{Re} w(x+ib) = \sqrt{\frac{4\ln 2}{\pi}} \frac{1}{\Delta\omega_D} \operatorname{Re} w(x+ib) = \frac{0,939}{\Delta\omega_D} \operatorname{Re} w(x+ib)$$

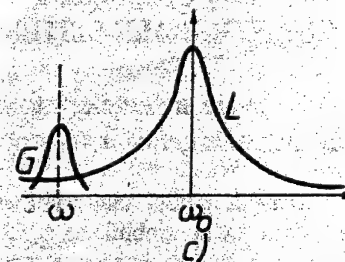


Fig. 40 c

- Conturul Voigt prezintă o comportare deosebită pentru frecvențe situate la limita lui:  $|\omega - \omega_0| \gg \Delta\omega_D, \Delta\omega$ , adică pentru frecvențe situate departe de frecvența centrală și mult în afara semilătimii conturului Doppler, respectiv de ciocniri. Pentru a face o analiză cantitativă trebuie remarcat faptul că profilul Voigt reprezintă produsul a două contururi, fiecare fiind centrat în jurul unei valori. Prin urmare valoarea maximă a unei funcții se suprapune peste "aripa" îndepărtată a celeilalte (fig. 40c). Odată cu variația lui  $\omega$ , conturul Gauss, față de conturul Lorentz, tinde la zero mai repede. Pentru valori mari ale lui  $\omega$ , contribuția principală la valoarea lui  $g(\omega, \nu)$  revine "aripei" funcției Lorentz corespunzătoare dipolilor care se deplasează cu viteza medie; contribuția Gauss este mică, deoarece numărul de dipoli a căror frecvență este deplasată la frecvența considerată ( $\omega$ ) este mic, viteza necesară acestei deplasări fiind mare. În

acest caz funcția Voigt poate fi înlocuită cu funcția Lorentz:  $g(\omega) \propto \frac{\Delta\omega/\pi}{(\omega - \omega_0)^2}$ ,

conturul, în acest domeniu, fiind asemănător cu cel de tip Lorentz (de ciocniri), deși lărgirea este determinată de efectul Doppler.

## Cap. V

### CARACTERISTICI CUANTICE ALE SISTEMELOR ATOMICE

#### 1. Nivelurile de energie ale sistemelor atomice și lățimea energetică a acestora.

Concepțiile actuale relativ la modul cum sunt emise radiațiile *em* optice, precum și la interacțiunea acestora cu ansamblul de sisteme atomice se bazează pe teoria cuantică. Concepțiile cuantice au fost introduse, sub forma unor postulate, de către Nils Bohr în 1913 și, pe baza acestora, el a reușit să explice spectrul energetic al celui mai simplu atom. Ulterior s-a constatat că acestea prezintă un caracter foarte general, lor supunându-li-se toate sistemele aparținând microcosmosului, astfel încât în momentul actual postulatele lui Bohr pot fi considerate legi cuantice fundamentale cărora li se supune orice sistem atomic. Prin sistem atomic (sistem cuantic) se înțelege atomul și ionul atomic, molecula și ionul molecular pozitiv sau negativ și sisteme asociate de atomi sau de molecule.

Relativ la energia internă a unui sistem atomic, Bohr a introdus două postulate și anume:

- Un sistem atomic poate exista numai în anumite stări staționare de energie ale mișcării lui interne. Aceste stări formează un șir discret, fiecare stare fiind caracterizată printr-o valoare bine precizată a energiei interne. Pentru un sistem atomic dat succesiunea valorilor energiei interne poate fi complet discretă sau complet continuă sau parțial discretă și parțial continuă.

- Un sistem atomic poate trece dintr-o stare energetică în alta modificându-și energia internă. Dacă trecerea se realizează de pe un nivel de energie mai mică pe unul cu energie mai mare (crește energia internă), sistemul primește din exterior cantitatea de energie corespunzătoare. Dacă trecerea se realizează de pe un nivel energetic superior spre unul inferior, sistemul cedează exteriorului o cantitate de energie, aceasta regăsindu-se sub formă de radiație *em* sau sub altă formă de energie. Conform acestui postulat, pentru a emite radiație *em* sistemul atomic trebuie să se afle pe un nivel energetic excitat, adică trebuie să-și mărească energia internă pe seama celei

primite din exterior, iar variația energiei lui interne este regăsită, ca rezultat al dezexcitării, sub forma unei anumite cantități de energie *em*, caracterizată printr-o anumită frecvență, dată de relația:

$$E_m - E_n = h\nu_{mn} \quad (E_m - E_n = \hbar\omega_{mn}, \text{ unde: } \hbar = h/2\pi),$$

unde  $E_m$  și  $E_n$  reprezintă energia internă a sistemului în stările staționare între care are loc tranziția, iar  $h = 6,62 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$  - constanta lui Planck.

Caracteristica principală a unui *nivel de energie* este valoarea corespunzătoare a energiei interne a sistemului. Corespunzător unei valori date a energiei, sistemul atomic se poate afla într-o stare staționară bine determinată sau în mai multe stări staționare, care se deosebesc între ele prin anumite proprietăți. În primul caz nivelul de energie, (starea sistemului), se numește *nede generat*, iar în al doilea caz este cunoscut sub denumirea de *de generat*. Numărul de stări independente ale sistemului cărora le corespund același nivel de energie (valoare a energiei) reprezintă *gradul de degenerare* ( $g_m$ ) al nivelului energetic ( $m$ ) al sistemului. Dacă sistemul atomic este supus unor interacțiuni suplimentare, stările independente degenerate ale acestuia interacționează diferit cu factorul extern, ceea ce determină variații diferite ale energiei nivelului. În acest mod este posibil să se realizeze situația de corespondență univocă; fiecărei stări independente, anterior degenerate, să-i corespundă o anumită valoare a energiei. În acest mod se înalță degenerarea, iar nivelul energetic considerat se despică în  $g_m$  niveluri. Gradul de degenerare reprezintă o caracteristică importantă a nivelului de energie. Printre altele el determină popularea nivelului energetic cu sisteme atomice, de aceea mai este cunoscut și sub denumirea de *pondere statistică*.

Nivelurile de energie introduse de către principiul lui Bohr nu sunt caracterizate printr-o valoare bine determinată a energiei, ceea ce ar implica o valoare bine determinată a frecvenței. Fiecare nivel este caracterizat printr-un interval de energie ( $\Delta E_m$ ), denumit *lățime energetică a nivelului*, centrat pe valoarea medie a energiei acestuia (fig. 19). Respectiv tranziția între două niveluri de energie va fi caracterizată prin *lățimea energetică* ( $\Delta E_{mn}$ ) a tranziției (sau a liniei spectrale), egală cu suma lățimilor energetice ale nivelurilor între care are loc tranziția:

$$\Delta E_{mn} = \Delta E_m + \Delta E_n.$$

Pentru un sistem atomic liber, lățimea energetică a nivelului, respectiv a tranziției între două niveluri, reprezintă *lățimea naturală* (sau *radiativă*).

Evaluarea lățimii energetice a unui nivel de energie poate fi efectuată pe baza relațiilor cuantice de incertitudine referitoare la timp și energie, introduse de către Heisenberg: dacă durata de existență a unui sistem este  $\Delta t$ , incertitudinea asupra aprecierii energiei acestuia este  $\Delta E$ , iar cele două mărimi satisfac relația:

$$\Delta E \cdot \Delta t \cong \hbar.$$

În cazul unui sistem atomic caracterizat prin valoarea  $E_m$  a energiei lui interne, timpul mediu de viață în această stare este  $\tau$ , iar lățimea energetică (incertitudinea asupra valorii lui  $E_m$ ) va fi:

$$(1.1) \quad \Delta E_m \cdot \tau_m \cong \hbar.$$

Prin urmare un sistem atomic a cărui energie este egală cu cea a nivelului fundamental este caracterizat printr-un timp mediu de viață infinit lung, iar lățimea energetică a acestuia tinde la zero. Dacă timpul mediu de viață al sistemului aflat pe nivelul fundamental este limitat în timp (de ex. datorită fenomenului de absorbție sistemul trece de pe nivelul energetic fundamental pe unul superior), atunci lățimea energetică a stării fundamentale devine finită.

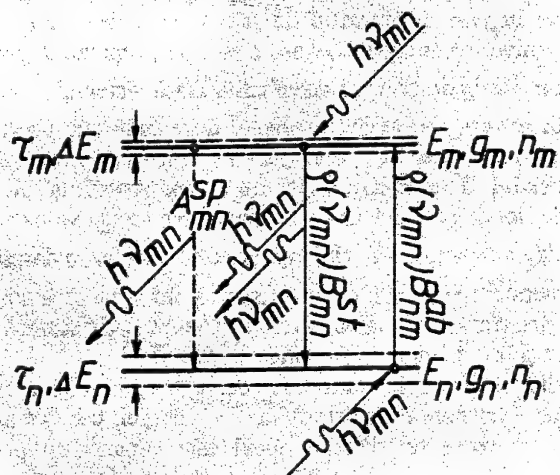


Fig. 41

(1.1) rezultă:

$$(1.2a) \quad \Delta E_m \cong \frac{\hbar}{\tau_m},$$

iar lățimea energetică exprimată în unități de frecvență este:

$$(1.2b) \quad \Delta \nu_m \cong \frac{1}{2\pi\tau_m}.$$

Dacă considerăm timpul mediu de viață al sistemului atomic de ordinul timpului de viață radiativ al dipolului electric oscilant ( $10^{-8}$  s), atunci:

$\Delta \nu_m \cong \frac{1}{2\pi \cdot 10^{-8}} \cong 10^7$  Hz. Lățimea energetică a tranziției exprimată în unități de frecvență este:

$$(1.3) \quad \Delta \nu_{mn} = \Delta \nu_m + \Delta \nu_n \cong \frac{1}{2\pi} \left( \frac{1}{\tau_m} + \frac{1}{\tau_n} \right).$$

## 2. Probabilitățile tranzițiilor spontane și forțate.

Să analizăm un ansamblu de sisteme atomice identice caracterizat prin concentrația (densitatea)  $n_v$  a sistemelor. Considerăm două niveluri energetice ale sistemului caracterizate prin energia  $E_m$  și  $E_n$  ( $E_m > E_n$ ). Din numărul  $n_v$  de sisteme,  $n_m$  respectiv  $n_n$  au energia  $E_m$  respectiv  $E_n$ . Valorile  $n_m$  respectiv  $n_n$  reprezintă densitățile populației de sisteme atomice a nivelurilor energetice (fig. 41).

Deoarece energia  $E_m$  este mai mare decât cea a stării fundamentale, sistemul nu se află într-o stare energetică stabilă; el are tendința de a trece după un interval de timp pe un nivel energetic inferior sau pe cel fundamental. Posibilitatea trecerii între diferite niveluri energetice este guvernată de legi cuantice specifice. Pentru moment considerăm că tranziția între nivelurile  $E_m$  și  $E_n$  este permisă de legile cuantice.

### 2.1 Fenomenul de emisie spontană.

Sistemele atomice ( $n_m$ ) care populează nivelul energetic  $E_m$  pot trece pe nivelul inferior  $E_n$ , trecerea fiind instantanee și însoțită de emisia unui foton a cărui frecvență este determinată de relația:

$$\nu_{mn} = \frac{E_m - E_n}{h}.$$

Procesul de trecere nu este influențat de factori externi, iar momentul emisieii fotonului (momentul tranziției), precum și direcția de emisie a acestuia au un caracter statistic. De asemenea procesul este independent de celelalte procese de același tip.

Într-un interval de timp  $\Delta t$ , densitatea de sisteme atomice care efectuează această tranziție (care este identică ca valoare cu numărul corespunzător de fotoni emiși în mod spontan) este proporțională cu densitatea populației nivelului ( $n_m$ ) și cu intervalul de timp considerat, coeficientul de proporționalitate fiind mărimea  $A_{mn}$ :

$$\Delta n_{mn}^{\text{em. spontană}} = A_{mn} n_m \Delta t.$$

Mărimea:

$$(2.1) \quad w_{mn}^{sp} = A_{mn} = \frac{\Delta n_{mn}^{sp}}{n_m \Delta t},$$

numită *coeficientul lui Einstein pentru emisie spontană*, reprezintă fracțiunea din numărul de sisteme atomice care emit în mod spontan în unitate de timp sau probabilitatea ca fenomenul să se producă. Fotonii emiși de către sistemele atomice cu probabilitate egală în toate direcțiile, sunt independenți, adică fazele undelor asociate lor nu sunt corelate, valoarea acestora variind aleator, cu egală probabilitate, între  $(0 + 2\pi)$  rad. De asemenea polarizarea fotonilor (direcția de acțiune a câmpului electric al unde asociată fotonului corespunzătoare la diferiți fotoni) este orientată aleator, cu probabilitate egală, în toate direcțiile, într-un plan perpendicular la direcția de propagare.

## 2.2 Fenomene forțate.

(a) *Absorbția radiației em de către sistemele atomice.*

Dacă ansamblul de sisteme atomice este supus acțiunii unui câmp *em* optic a cărui frecvență este egală cu frecvența unei tranziții a sistemului ( $\nu = \nu_{mn}$ ), atunci apare un proces de interacțiune între câmp și sistem, care constă în tranziția acestuia de pe nivelul energetic inferior  $E_n$  pe cel superior  $E_m$ . Se consideră că tranziția are loc în mod instantaneu. Procesul este forțat și prezintă un pronunțat caracter de rezonanță. Ca rezultat al acestui proces, câmpul *em* pierde un foton, iar energia internă a sistemului atomic crește cu valoarea energiei fotonului.

Densitatea sistemelor atomice ce efectuează această tranziție într-un interval de timp  $\Delta t$  este proporțională cu densitatea populației nivelului energetic inferior ( $n_n$ ), densitatea de radiație a câmpului *em* la frecvența  $\nu = \nu_{mn}$  și cu intervalul de timp  $\Delta t$ :

$$\Delta n_{nm}^{ab}(\nu_{mn}) = B_{nm} n_n \rho(\nu_{mn}) \Delta t.$$

Mărimea:

$$(2.2) \quad B_{nm} = \frac{1}{\rho(\nu_{mn})} \frac{\Delta n_{nm}^{ab}(\nu_{mn})}{n_n \Delta t},$$

numită *coeficientul lui Einstein pentru absorbție*, reprezintă fracțiunea din numărul de sisteme atomice capabile să prezinte fenomenul de absorbție, care au absorbit fotoni de frecvența  $\nu_{mn}$  într-un interval de timp egal cu unitatea, raportată la unitatea de densitate de energie a câmpului. Mărimea:

$$(2.3) \quad w_{nm}^{ab} = B_{nm} \rho(\nu_{mn}) = \frac{\Delta n_{nm}^{ab}(\nu_{mn})}{n_n \Delta t},$$

reprezintă fracțiunea din sistemele atomice considerate care absorb fotoni de frecvență  $\nu_{mn}$  în unitate de timp sau probabilitatea procesului de absorbție.

(b) *Emisia stimulată.*

Dacă nivelul energetic superior  $E_m$  este populat cu sisteme atomice ( $n_m$ ), atunci câmpul *em* (fotonii) cu frecvența  $\nu = \nu_{mn}$  interacționează cu sistemele atomice aflate pe nivelul excitat și le forțează să efectueze tranziția spre nivelul inferior  $E_n$ , care se consideră instantanee. Procesul este forțat și de asemenea prezintă un pronunțat caracter de rezonanță. Ca rezultat al acestui proces, sistemul atomic își micșorează energia internă, aceasta fiind regăsită în câmpul *em*, sub forma unui foton. Einstein a arătat că radiația obținută ca rezultat al acestui proces trebuie să prezinte aceleași caracteristici ca și radiația stimulatoră: frecvența, faza oscilației, direcția de propagare, precum și starea de polarizare sunt identice.

Densitatea de sisteme atomice ce trec de pe nivelul energetic superior pe cel inferior prin efectul de emisie stimulată în intervalul de timp  $\Delta t$ , este proporțională cu densitatea populației nivelului superior, cu densitatea de radiație (densitatea de fotoni) a câmpului *em* și cu intervalul de timp  $\Delta t$ , coeficientul de proporționalitate fiind mărimea  $B_{mn}$ :

$$\Delta n_{mn}^{st}(\nu_{mn}) = B_{mn} n_m \rho(\nu_{mn}) \Delta t.$$

Mărimea:

$$(2.4) \quad B_{mn} = \frac{1}{\rho(\nu_{mn})} \frac{\Delta n_{mn}^{st}(\nu_{mn})}{n_m \Delta t},$$

*coeficientul lui Einstein pentru emisie stimulată*, reprezintă fracțiunea din densitatea populației stării superioare care efectuează tranziția  $m \rightarrow n$  în mod stimulat, într-un interval de timp egal cu unitatea, raportată la unitatea de densitate de energie a câmpului *em*. Mărimea:

$$(2.5) \quad w_{mn}^{st} = B_{mn} \rho(\nu_{mn}) = \frac{\Delta n_{mn}^{st}(\nu_{mn})}{n_m \Delta t},$$

reprezintă fracțiunea din densitatea populației stării superioare supusă efectului de emisie stimulată în unitate de timp sau probabilitatea procesului de emisie stimulată.

Mărimile  $A_{mn}$ ,  $B_{mn}$  și  $B_{nm}$  depind numai de proprietățile nivelelor energetice între care are loc tranziția (deci caracterizează tranziția cuantică) și nu depind de temperatura ansamblului de sisteme cuantice. Spre deosebire de cazul emisiei spontane, probabilitatea proceselor stimulate depinde de densitatea de radiație a câmpului *em* excitator, dar caracterul forțat nu schimbă natura întâmplătoare a acestora.

## 3. Relațiile dintre coeficienții lui Einstein.



Legătura dintre acești coeficienți a fost stabilită de către Einstein analizând interacțiunea câmpului  $em$  al radiației termice de echilibru cu un ansamblu de sisteme atomice aflat în echilibru termodinamic. Conform distribuției Boltzman, densitatea populației nivelului energetic  $E_m$ , dacă ansamblul se află în echilibru termodinamic la temperatura  $T$ , este dată de relația:

$$(3.1) \quad n_m = \frac{n_v g_m e^{-E_m/kT}}{\sum_m g_m e^{-E_m/kT}},$$

unde  $n_v$  reprezintă densitatea totală a ansamblului, iar sumarea se extinde la toate nivelurile energetice ale sistemului atomic. Einstein a considerat că în prezența radiației termice de echilibru, când devin posibile și tranzițiile stimulate alături de cele spontane, nu se modifică tipul de distribuție a sistemelor atomice pe stările energetice. Aceasta înseamnă că numărul mediu de fotoni emis de ansamblu este egal cu cel absorbit. În aceste condiții, pentru orice temperatură, populațiile celor două stări energetice trebuie să îndeplinească condiția:

$$(3.2) \quad n_n w_{nm}^{ab} = n_m (w_{mn}^{sp} + w_{mn}^{st})$$

sau, folosind (3.1), se obține:

$$w_{nm}^{ab} g_n \exp(-E_n/kT) = g_m (w_{mn}^{sp} + w_{mn}^{st}) \exp(-E_m/kT),$$

de unde:

$$(3.3) \quad \frac{g_n}{g_m} \exp\left(\frac{E_m - E_n}{kT}\right) = \frac{w_{mn}^{sp} + w_{mn}^{st}}{w_{nm}^{ab}} = \frac{A_{mn}}{B_{nm}^{ab} \rho(v_{mn})} + \frac{w_{mn}^{sp}}{B_{nm}^{ab}}.$$

Relația (3.3) trebuie îndeplinită și la temperaturi mari ( $T \rightarrow \infty$ ), când densitatea de radiație crește foarte mult, ceea ce conduce la condițiile:

$$A_{mn} \ll (B_{nm}^{ab} \rho(v_{mn}) \text{ și } \exp(hv_{mn}/kT) \cong 1.$$

Aceste condiții implică următoarea legătură între coeficienții lui Einstein:

$$(3.4) \quad g_n B_{nm}^{ab} = g_m B_{mn}^{st}$$

(dacă cele două niveluri sunt nedegenerate  $g_m = g_n = 1$ , atunci  $B_{nm}^{ab} = B_{mn}^{st}$ ).

Din (3.3), folosind (3.4), rezultă:

$$\rho(v_{mn}) = \frac{A_{mn}}{B_{mn} \exp(hv_{mn}/kT) - 1}$$

Deoarece câmpul  $em$  care interacționează cu ansamblul de sisteme atomice este de tipul radiației termice de echilibru, densitatea de energie a acestuia este descrisă de legea lui Planck, care, pentru frecvența  $v_{mn}$  este dată de relația:

$$(3.5) \quad \rho(v_{mn}) = \frac{\omega^3}{\pi^2 c^3} \frac{1}{\exp(hv_{mn}/kT) - 1}$$

Prin urmare coeficienții lui Einstein trebuie să îndeplinească relația:

$$(3.6) \quad \frac{A_{mn}}{B_{mn}} = \frac{\omega^3}{\pi^2 c^3}.$$

Aceste relații, obținute în condițiile interacțiunii radiației termice de echilibru cu ansamblu de sisteme atomice aflat în echilibru termodinamic, sunt valabile și în condițiile de neechilibru, deoarece atât relațiile cât și coeficienții lui Einstein nu depind de temperatură.

### 3.1 Coeficienții diferențiali a lui Einstein.

În prg. 2, pentru a caracteriza procesele de emisie și de absorbție ale fotonului au fost introduși coeficienții lui Einstein corespunzători acestor procese, care reprezintă *coeficienți integrali*. Acești coeficienți depind și de alți parametri: direcția emisiei spontane, respectiv direcția fascicului excitator, starea de polarizare a radiației precum și de frecvență. Pentru a considera acești parametri, prin definiție se introduc *coeficienții diferențiali a lui Einstein*.

Probabilitatea de emisie spontană a fotonului în intervalul de frecvențe  $\omega \div \omega + d\omega$ , în unghiul solid  $d\Omega$  și caracterizat prin polarizarea  $\alpha$  este descrisă de relația:

$$(3.7) \quad d w_{mn}^{sp} = a_{mn\alpha}(\omega, \Omega) d\omega d\Omega,$$

iar probabilitatea integrală va fi:

$$(3.8) \quad w_{mn}^{sp} = A_{mn} = \sum_{\alpha} \int \int a_{mn\alpha}(\omega, \Omega) d\omega d\Omega.$$

Analog se introduc coeficienții diferențiali pentru emisie stimulată  $b_{mn}(\omega, \Omega)$  și absorbție  $b_{nm}(\omega, \Omega)$ , între care există relațiile:

$$\frac{a_{mn\alpha}(\omega, \Omega)}{b_{mn\alpha}(\omega, \Omega)} = \frac{A_{mn}}{B_{mn}} = \frac{\omega^3}{\pi^2 c^3} \text{ și } g_m b_{mn\alpha}(\omega, \Omega) = g_n b_{nm\alpha}(\omega, \Omega).$$

### 4. Timpul de viață al stărilor excitate.

Sistemele atomice ce populează un nivel energetic excitat, aflându-se într-o stare de neechilibru energetic, îl părăsesc efectuând tranziția de emisie spontană, permisă de regulile de selecție, spre nivelurile energetice inferioare. În acest mod nivelul se depopulează în timp. Din acest punct de vedere el poate fi caracterizat prin

timpul de viață al sistemului atomic pe nivelul energetic considerat. Procesul de depopulare prezintă un caracter statistic.

Să analizăm variația în timp a populației nivelului energetic determinată de emisia spontană. Densitatea populației nivelului  $E_m$ , la momentul inițial  $t_0$  este  $n_{0m}$ , iar la momentul  $(t_0 + t)$  devine  $n_m(t)$  (după momentul  $t_0$  nu au mai avut loc procese de excitare). Într-un interval de timp  $dt$ , micșorarea densității populației  $d n_{0m}$  prin tranziții spontane spre nivelul energetic  $E_n$ , este dată de relația:

$$(4.1) \quad d(n_m)_n = -A_{mn} n_m(t) dt, \text{ de unde:}$$

$$(4.2) \quad A_{mn} = -\frac{1}{n_m(t)} \frac{d(n_m)_n}{dt},$$

adică probabilitatea tranziției spontane este egală cu descreșterea relativă a numărului de sisteme atomice în unitate de timp determinată de această tranziție. Probabilitatea este determinată de proprietățile cuantice ale stării și nu depinde de timp, adică la orice moment probabilitatea de emisie a fotonului de către sistemul excitat este aceeași, indiferent de momentul când are loc emisia.

Micșorarea populației nivelului  $E_m$  se produce în mod independent, pe seama fiecărei tranziții spontane de pe nivelul  $E_m$  pe toate nivelurile inferioare  $E_i$  (fig. 42):

$$(4.3) \quad -d n_m = -\sum_{i<m} d(n_m)_i = \left( \sum_{i<m} A_{mi} \right) n_m(t) dt = A_m n_m(t) dt,$$

de unde:

$$(4.4) \quad A_m = \sum_{i<m} A_{mi} = -\frac{1}{n_m(t)} \frac{d n_m}{dt},$$

reprezintă probabilitatea totală a tranzițiilor spontane de pe nivelul  $E_m$  pe toate nivelurile  $E_i$  inferioare acestuia.

Integrarea ecuației diferențiale (4.3) conduce la relația:

$$(4.5) \quad n_m(t) = n_{0m} \exp(-A_m t),$$

adică populația nivelului energetic, datorită tranzițiilor spontane, scade după o lege exponențială. Folosind (4.4), din relația (4.3) se obține:

$$(4.6) \quad -\frac{1}{n_{0m}} \frac{d n_m}{dt} = A_m \exp(-A_m t),$$

care reprezintă probabilitatea ca un sistem atomic să prezinte timpul de viață egal cu  $t$  în starea excitată.

Deoarece diferite sisteme atomice prezintă timpuri de viață diferite în starea excitată, se introduce *timpul mediu de viață* al sistemului atomic în starea considerată:

$$(4.7) \quad \langle t \rangle = \tau_m = \int_0^{+\infty} t A_m \exp(-A_m t) dt = \frac{1}{A_m} = \frac{1}{\sum_{i<m} A_{mi}} = \sum_{i<m} \tau_{mi}$$

Conform relației (4.5), timpul mediu de viață al stării excitate reprezintă timpul după care populația stării excitate scade de  $e$  ori față de cea inițială. Timpul mediu de viață, fiind determinat de mărimea  $A_m$ , reprezintă o caracteristică a nivelului energetic și nu al unei tranziții izolate. Timpul mediu de viață al stărilor electronice ale sistemelor atomice este de ordinul a  $10^{-8}$  s, ceea ce conduce la valori de ordinul  $A_m \approx 10^8 \text{ s}^{-1}$ .

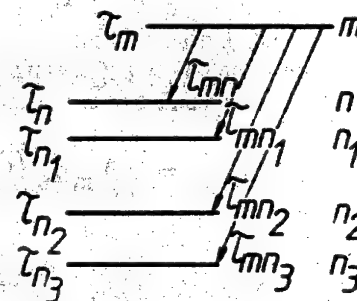


Fig. 42

Dacă probabilitatea tranzițiilor spontane de pe nivelul excitat pe cele inferioare este foarte mică sau nulă, timpul mediu de viață al acestuia devine foarte mare ( $\tau_m \rightarrow \infty$ ). Un asemenea nivel energetic se numește *metastabil* și favorizează obținerea de densități de populație foarte mari (înmagazinare de energie), de aceea asemenea niveluri au un rol deosebit în funcționarea sistemelor laser.

Depopularea unui nivel excitat se poate realiza nu numai prin tranziții spontane însoțite de emisie de fotoni (*tranziții radiative*), ci și prin fenomene în care variația energiei interne a sistemului atomic este transmisă mediului înconjurător (*tranziții neradiative*). Variația energiei poate fi transmisă unor sisteme atomice de alt gen prin procese de ciocniri neelastice (în cazul moleculelor aceste ciocniri pot modifica energia lor de rotație sau de vibrație), peretelui tubului de descărcare la ciocnirea sistemului

atomic excitat cu acesta sau rețelei cristaline (interacțiune foton - fonon) când sistemul atomic excitat se află înglobat în rețea. Un asemenea proces de asemenea are un caracter statistic, iar nivelul energetic poate fi caracterizat prin *probabilitatea tranziției neradiative* ( $\gamma_m$ ) dată de relația:

$$(4.8) \quad \gamma_m = -\frac{1}{n_m(t)} \frac{dn_m(t)}{dt}$$

În aceste condiții, descreșterea totală a populației nivelului energetic este dată de relația:

$$(4.9) \quad \frac{dn_m(t)}{dt} = -(A_m + \gamma_m)n_m(t)$$

respectiv, legea dezexcitării devine:

$$(4.10) \quad n_m(t) = n_{0m} \exp[-(A_m + \gamma_m)t]$$

nivelul energetic este caracterizat prin timpul de viață:

$$(4.11) \quad \tau'_m = \frac{1}{A_m + \gamma_m} = \frac{\tau_m}{1 + \gamma_m/A_m}$$

iar lățimea energetică se mărește:

$$(4.12) \quad \Delta E_m \cong \frac{\hbar}{\tau'_m} = \frac{\hbar}{\tau_m} \left(1 + \frac{\gamma_m}{A_m}\right)$$

Prezența tranzițiilor neradiative determină atât micșorarea timpului de viață al stării excitate, cât și a numărului de fotoni ce pot fi emiși în mod spontan. Numărul acestora este egal cu numărul de sisteme atomice ce se vor dezexcita radiativ:

$$(4.13) \quad \begin{aligned} n'_{0m} &= \int_0^{+\infty} \frac{dn_m^{sp}(t)}{dt} dt = \int_0^{+\infty} A_m n_m(t) dt = \\ &= A_m \int_0^{+\infty} n_{0m} \exp[-(A_m + \gamma_m)t] dt = \frac{n_{0m} A_m}{A_m + \gamma_m} = \frac{n_{0m}}{1 + \frac{\gamma_m}{A_m}} \end{aligned}$$

Acest fenomen determină micșorarea densității de radiație corespunzătoare tranziției spontane (extincția tranziției). Pentru caracterizarea lui se introduce noțiunea de *randament cuantic* al emisieii ca fiind numeric egal cu raportul dintre numărul de fotoni emiși la numărul de fotoni absorbiți (care este egal cu numărul inițial de sisteme atomice excitate  $n_{0m}$ ):

$$(4.14) \quad \beta_m = \frac{n'_{0m}}{n_{0m}} = \frac{A_m}{A_m + \gamma_m}$$

## 5. Distribuția sistemelor atomice

în lățimea energetică a nivelului.

În prg. 1 s-a stabilit că fiecare nivel energetic este caracterizat printr-o lățime energetică, determinată de mărimea timpului de viață a sistemului atomic pe nivelul energetic considerat. Tranziția spectrală între două niveluri energetice trebuie să fie caracterizată printr-o lățime spectrală (sau energetică) corespunzătoare lățimii energetice a celor două niveluri. În cazul unui ansamblu de sisteme atomice, acestea populează nivelurile energetice, popularea fiind caracterizată prin mărimea densității de populație. Se pune problema stabilirii formei funcției de distribuție a densității de populație după energiile corespunzătoare lățimii energetice a unui nivel. Aceasta va determina funcția de distribuție spectrală a fluxului de energie corespunzător tranziției între cele două niveluri. Funcția de distribuție spectrală trebuie să coincidă cu cea obținută pe baza unor considerente ale electrodinamicii clasice, care a fost confirmată prin determinări experimentale.

Plecând de la aceste cerințe, într-un ansamblu format din sisteme atomice aflate în repaus, se consideră funcția de distribuție a sistemelor atomice după energie drept o funcție de tip Lorentz normată și caracterizată prin lățimea corespunzătoare. Lățimea energetică a nivelului ( $\Delta E_m$ ) corespunde valorii energiei pentru care populația corespunzătoare este egală cu jumătate din valoarea corespunzătoare energiei "centrale" a nivelului (fig. 43). Densitatea elementară de populație în interiorul unui nivel energetic este dată de relația:

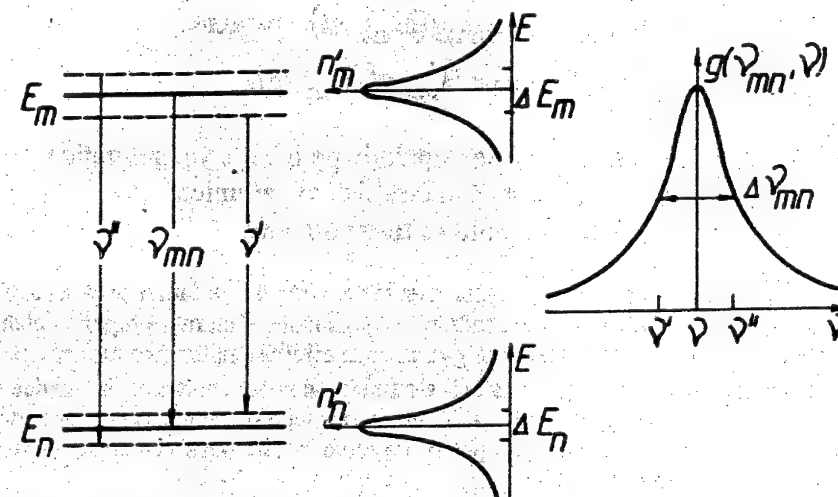


Fig. 43

$$(5.1) \quad dn_m(E) = n_{mv} g(E_m, E) dE,$$

unde  $g(E_m, E)$  reprezintă funcția Lorentz normată, deoarece:

$$\int_0^{+\infty} n_m(E) dE = n_{m_v} = n_{m_v} \int_0^{+\infty} g(E_m, E) dE.$$

În aceste condiții să analizăm procesul de emisie spontană, precum și procesele forțate. Dacă se consideră lățimea energetică a nivelelor, sistemele atomice vor efectua tranziții spontane de pe domeniul energetic al nivelului superior pe cel al nivelului inferior. Probabilitatea maximă corespunde tranziției între valorile energetice centrale ale celor două niveluri. Dacă se consideră relațiile (2.1), (3.6) și (5.1) numărul de sisteme atomice dezexcitate prin emisie spontană (sau numărul de fotoni corespunzători) în intervalul de timp  $dt$ , va fi dată de relația:

$$(5.2) \quad \begin{aligned} d n_{mn}(\omega) &= A_{mn} n_{m_v} g(\omega_{mn}, \omega) d\omega dt = a_{mn}(\omega) d\omega dt \\ a_{mn}(\omega) &= A_{mn} g(\omega_{mn}, \omega), \end{aligned}$$

reprezintă coeficientul diferențial al emisei spontane dependent de frecvență,  $A_{mn}$  - coeficientul integral al emisei spontane extins la domeniul de frecvențe descris de funcția de distribuție spectrală  $g(\omega_{mn}, \omega)$ , care în cazul considerat, este de tip Lorentz. În mod analog se stabilește dependența de frecvență a coeficienților diferențiali pentru fenomenele forțate:

$$(5.3) \quad b_{mn}^{st}(\omega) = B_{mn} g(\omega_{mn}, \omega) \text{ respectiv,}$$

$$(5.4) \quad b_{nm}^{ab}(\omega) = B_{nm} g(\omega_{mn}, \omega).$$

## 6. Distribuția densității de populație pe nivelurile energetice în cazul ansamblului de sisteme atomice aflat în echilibru termodinamic.

Densitatea populației nivelurilor energetice depinde de faptul dacă ansamblul de sisteme atomice se află sau nu în echilibru termodinamic. Pentru a simplifica analiza, se consideră un ansamblu sub formă de gaz, aflat în echilibru termodinamic caracterizat prin temperatura  $T$ . Distribuția densității sistemelor atomice după energii cinetice este descrisă de legea de distribuție Maxwell. În aceste condiții sunt posibile procese de ciocniri între sistemele atomice, care pot fi împărțite în cele două categorii, *elastice* și *neelastice*, descrise în prg. III 2.1.

Ciocnirile neelastice, având ca rezultat modificarea energiei interne a sistemelor atomice, determină distribuția acestora pe nivelurile energetice. Ansamblul fiind în echilibru termodinamic, sistemele atomice vor prezenta diferite energii cinetice de translație, conform legii de distribuție Maxwell. La temperaturi mai ridicate, numărul de sisteme atomice cu energie cinetică mare va fi mai mare față de cazul temperaturilor scăzute. În aceste condiții devin posibile ciocnirile neelastice de speța întâi care conduc la popularea cu sisteme atomice a nivelurilor energetice superioare.

Sistemul atomic aflat pe un nivel excitat are două căi de evoluție ulterioară.

- Deoarece sistemele atomice ale ansamblului sunt identice, există posibilitatea unei ciocniri neelastice de speța a doua între sistemul excitat și unul aflat pe un nivel inferior cu transfer al energiei interne, proces care nu modifică densitatea populației stării excitate. Acest proces trebuie să se producă în intervalul timpului de existență al sistemului în starea excitată.

- După scurgerea timpului de viață, sistemul atomic trece pe un nivel energetic inferior, prin emisie spontană radiativă. Cuantele de energie obținute reprezintă câmpul  $em$  care poate stimula procesele forțate între cele două niveluri: absorbție, având ca rezultat revenirea sistemului atomic în starea excitată inițială (procesul de captură de fotoni) și emisie stimulată, având ca rezultat intensificarea câmpului  $em$ . Aceste procese de interacțiune a radiației proprii cu sistemele atomice devin importante numai la temperaturi ridicate.

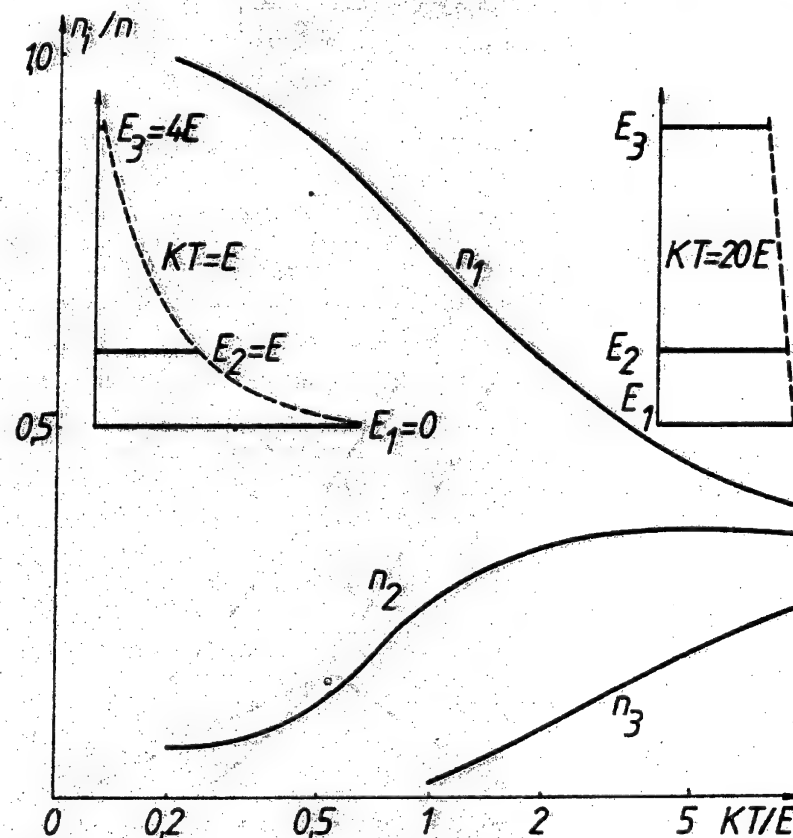


Fig. 44 a

Pe baza acestor procese prezentate fenomenologic se poate admite că într-un ansamblu de sisteme atomice aflat în echilibru termodinamic, nivelurile excitate sunt populate cu sisteme atomice. Între populațiile diferitelor niveluri se stabilește un echilibru dinamic, iar funcția care guvernează distribuția acestora trebuie să depindă de



temperatură și de valoarea energiei nivelului. Funcția de distribuție, stabilită de către Boltzman, are expresia următoare:

$$(6.1) \quad n_m = \frac{g_m n_v \exp(-E_m/kT)}{\sum_m g_m \exp(-E_m/kT)},$$

unde:  $Z = \sum_m g_m \exp(-E_m/kT)$  reprezintă suma statistică.

Populația relativă a două niveluri energetice nu depinde de densitatea sistemelor atomice și este dată de relația:

$$(6.2) \quad \frac{n_m}{n_n} = \frac{g_m}{g_n} \exp\left(-\frac{E_m - E_n}{kT}\right).$$

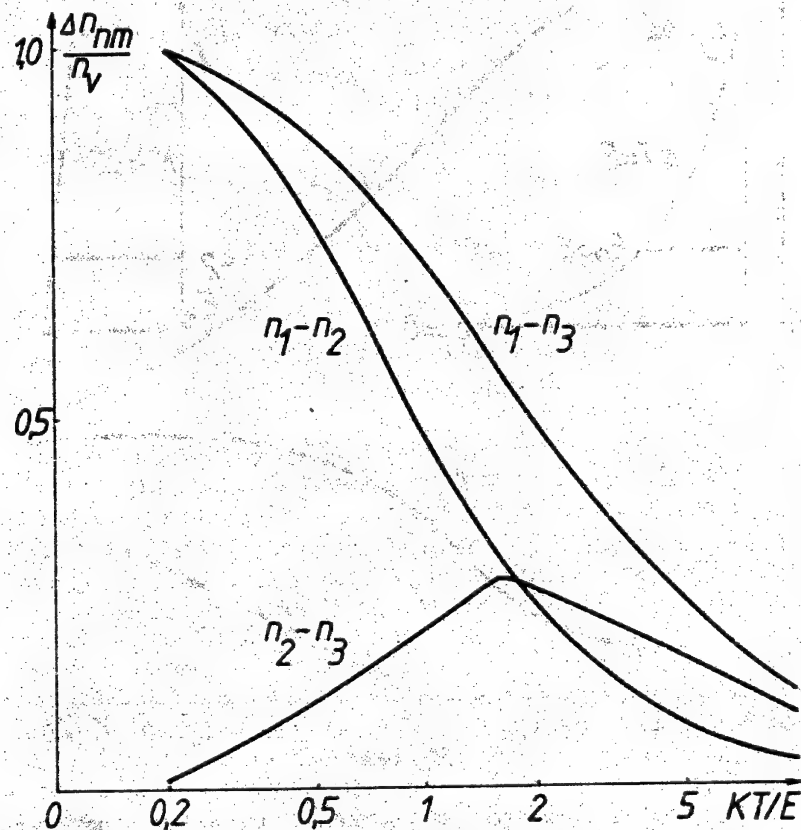


Fig. 44 b

Se obișnuiește să se reprezinte grafic distribuția sistemelor atomice pe nivelurile energetice într-un sistem de coordonate în care pe verticală este reprezentată energia nivelului iar pe orizontală valoarea corespunzătoare a densității populației determinată de curba:  $\exp(-E_m/kT)$ . În fig. 44 a este reprezentată dependența densității populației de mărimea  $(kT/E)$ , unde  $T$  este mărimea variabilă, pentru trei niveluri energetice:  $E_1 = 0$ ,  $E_2 = E$  și  $E_3 = 4E$ ; în fig. 44 b este prezentată dependența diferenței populației de mărimea  $(kT/E)$ . Se observă că oricare ar fi temperatura, diferența densității populațiilor a două niveluri energetice (primul inferior și al doilea superior) este mai mare ca zero, tinzând la zero pentru temperaturi foarte ridicate.

## 7. Corespondența dintre modelul clasic de dipol electric și cel cuantic:

Modelul clasic de dipol electric oscilant a fost caracterizat prin momentul de dipol electric ( $\mathbf{p} = -e\mathbf{r}$ ) și o valoare a energiei interne proprii sistemului, care, datorită unor cauze externe, poate fi mărită în mod continuu (creșterii energiei interne îi corespunde o modificare a momentului de dipol) față de valoarea corespunzătoare stării de echilibru. Modelul a cărui energie internă a fost mărită, lăsat liber, datorită unor cauze interne, revine la starea de echilibru, executând o mișcare oscilatorie amortizată caracterizată prin frecvența  $\nu_0$ . Conform electrodinamicii clasice, variația energiei interne a sistemului este regăsită sub forma energiei câmpului *em* radiat de către acesta. Mărimea energiei fiind finită, unda *em* este amortizată, caracterizată prin coeficientul de amortizare radiativă ( $\gamma_0$ ), căruia îi corespunde timpul de relaxare radiativ ( $T_1$ ). Analiza spectrală a semnalului radiat de către dipol, evidențiază faptul că acesta este constituit dintr-o armonică de bază și o succesiune continuă de armonici (necorelate între ele în ceea ce privește faza relativă) cu frecvențe diferite a căror amplitudini tind foarte repede la zero odată cu variația frecvenței lor față de frecvența de bază. Conturul spectral al semnalului a fost caracterizat prin lățimea spectrală radiativă (naturală) ( $\Delta\nu_0$ ). Prin urmare modelul este capabil să emită câmp *em* sau să interacționeze cu acesta într-un singur domeniu spectral foarte îngust centrat pe frecvența  $\nu_0$ , determinată de caracteristicile acestuia.

În realitate, conform postulatelor lui Bohr și materialului experimental acumulat, sistemul atomic poate radia câmp *em* sau interacționa cu acesta pe un număr mare de frecvențe, teoretic infinit de mare. Pentru a modela această realitate se introduce modelul de oscilator cuantic. Energia internă a acestuia nu poate varia în mod continuu, ci numai în salturi. Corespunzător, amplitudinea oscilațiilor momentului de dipol electric, la trecerea modelului cuantic dintr-o stare energetică în alta, variază în salturi.

Problema radiației oscilatorului cuantic este rezolvată pe baza conceptelor ce stau la baza mecanicii cuantice și se obțin rezultate, care, la limită, conform principiului

corespondenței, trebuie să coincidă cu cele clasice. În acest scop modelul clasic de dipol electric oscilant se atașează unei tranziții cuantice a sistemului atomic, de ex. tranziției între nivelurile energetice  $E_m$  și  $E_n$  ( $E_m > E_n$ ); frecvența de rezonanță clasică a oscilatorului ( $\nu_0$ ) trebuie să corespundă frecvenței tranziției  $m \leftrightarrow n$ :

$$\nu_{mn} = \frac{E_m - E_n}{h}$$

Trebuie subliniat faptul că modelului îi corespunde un singur electron, iar atașând unei tranziții  $m \leftrightarrow n$  un dipol de tip Lorentz, aceștia i se atașează un sistem cu un singur grad de libertate. Dacă considerăm un ansamblu de sisteme atomice, atunci unui nivel excitat, populat inițial cu  $n_{0m}$  sisteme care pot efectua tranziția  $m \leftrightarrow n$ , i se atașează  $n_{0m}$  dipoli oscilanți. Din punct de vedere clasic, creșterea inițială a energiei interne a ansamblului ( $n_{0m} U_0$ ) se micșorează în mod continuu prin emisie radiativă, astfel încât după un interval de timp  $t$ , aceasta devine:

$$(7.1) \quad n_{0m} U(t) = n_{0m} U_0 e^{-\gamma_0 t}$$

Din punct de vedere cuantic, pierderea de energie a ansamblului de sisteme atomice  $n_{0m}$  ce populează nivelul  $E_m$ , în intervalul de timp  $t$ , se realizează conform relației:

$$(7.2) \quad n_m(t) h \nu_{mn} = n_{0m} h \nu_{mn} e^{-A_0 t}$$

Dacă se consideră un singur dipol de tip Lorentz, deosebirea dintre modelul clasic și cel cuantic atașat tranziției constă în faptul că în timp ce oscilatorul clasic, a cărui energie internă a fost mărită de ex. cu  $\Delta E = h \nu$ , o pierde în mod continuu, fiind caracterizat prin constanta de relaxare ( $\gamma_0$ ), din punct de vedere cuantic acesta pierde întreaga cantitate de energie în mod instantaneu.

Relațiile (7.1) și (7.2) vor descrie în mod identic variația energiei interne a ansamblului dacă:  $A_0 = \gamma_0$  și  $U_0 = h \nu_{mn}$ , unde  $A_0$  reprezintă valoarea probabilității cuantice a proceselor corespunzătoare valorii constantei clasice de amortizare. Respectiv, timpului de relaxare  $T_1$  al dipolului clasic îi va corespunde timpul mediu de viață al tranziției ( $\tau_{mn}$ ), iar lățimii spectrale radiative a semnalului ( $\Delta \nu_0$ ) îi va corespunde lățimea spectrală naturală a tranziției ( $\Delta \nu_{mn}$ ).

Valoarea probabilității reale  $A_{mn}$  a tranziției  $n \leftrightarrow m$ , diferă de cea clasică  $A_0$ , deoarece depinde atât de caracteristicile modelului clasic considerat cât și de proprietățile stărilor cuantice între care are loc tranziția. Pentru a considera acest fapt, fără a face apel la metodele mecanicii cuantice, se introduce noțiunea de *tărie a oscilatorului* ( $f_{mn}$ ) corespunzătoare unei tranziții, prin raportul:

$$(7.3) \quad f_{mn} = \frac{A_{mn}}{A_0},$$

mărimea  $A_0$  devenind unitate naturală de măsură față de care se exprimă probabilitatea reală a procesului. Există totdeauna relația  $A_{mn} \leq A_0$ , semnul "egal" se referă la cazul tranziției total permise.

Dacă considerăm sistemul atomic caracterizat prin energia internă corespunzătoare unei stări  $n$ , acesta are posibilitatea efectuării de tranziții spre stări inferioare, superioare și în domeniul superior limitei de ionizare caracterizat prin distribuția continuă a stărilor după energie. Tranzițiile spre stări inferioare sunt caracterizate prin valori negative ale tăriei oscilatorului.

Se poate demonstra că suma tăriilor oscilatorilor corespunzători tranzițiilor de pe nivelul  $E_n$  pe toate celelalte niveluri posibile trebuie să fie egală cu unitatea:

$$(7.4) \quad \sum_k f_{nk} = 1,$$

relație verificată de datele experimentale. Dacă starea inițială a tranziției este cea fundamentală, relația (7.4), folosind (7.3), devine:

$$(7.5) \quad A_0 \sum_k f_{ik} = \sum_k A_{ik} = A_0.$$

Conform acestei relații, dacă modelul Lorentz este atașat atomului, atunci mărimile  $f_{mn}$  indică fracția din probabilitatea  $A_0$  care corespunde tranziției  $n \leftrightarrow m$ .

## 8. Mecanisme de modificare a lățimii nivelurilor energetice și a lățimii spectrale a tranziției;

*lățirea determinată de ciocnirile sistemelor atomice ale ansamblului.*

În prg. III 2 a fost analizat mecanismul de modificare a lățimii funcției spectrale de distribuție a radiației emise de către ansamblul de dipoli supuși ciocnirilor, respectiv lățirea domeniului spectral de interacțiune al ansamblului cu un câmp *em* armonic.

În acest paragraf este analizat același efect, însă considerând procesul de ciocnire al sistemelor cuantice. Dacă de sistemul cuantic A, caracterizat prin nivelurile energetice  $E_n$  și  $E_m$ , se apropie de un alt sistem, atunci, datorită interacțiunii dintre sisteme, se modifică valoarea energiei nivelelor energetice ale sistemului A. Modificarea depinde de configurația electronică a celor două sisteme, precum și de distanța  $r(A, B)$  dintre centrele de masă ale acestora. Variația energiei este diferită pentru niveluri energetice diferite, fiind pozitivă dacă interacțiunea este "de repulsie" și negativă dacă este "de atracție". Pentru un nivel energetic dat, reprezentarea energiei acestuia funcție de distanța  $r$  dintre sisteme reprezintă *curba potențială* -  $E(r)$  (fig. 45).

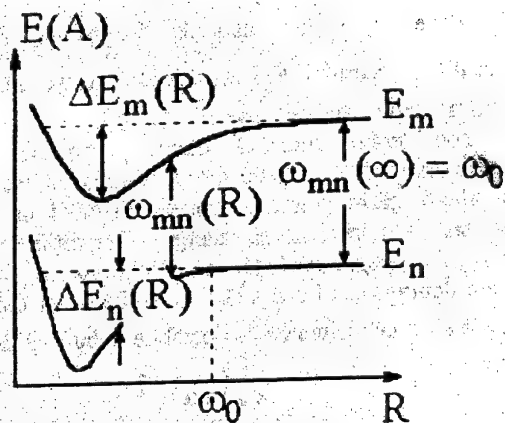


Fig. 45

Interacțiunea reciprocă a celor două sisteme cuantice la distanțe  $r(R_c)$ , unde mărimea  $2R_c$  reprezintă *diametrul de ciocnire*, este cunoscută sub denumirea de *ciocnire*. Dacă în timpul procesului de ciocnire partenerii nu transferă între ei energie internă prin tranziții neradiative, atunci ciocnirea este de tip *elastic*. Schimbul de energie cinetică se realizează astfel încât suma energiilor cinetice de translație a celor doi parteneri înainte și după ciocnire este egală. Procesul nu afectează valoarea momentană a energiei interne a sistemului atomic asociat "mișcărilor interne", însă perturbă faza acestei mișcări. După un *interval de timp de ciocnire* ( $\tau_c \cong \frac{R_c}{v}$ ), dacă nu acționează

mecanisme suplimentare de recombinare, cele două sisteme cuantice se separă.

Dacă în intervalul timpului de ciocnire sistemul cuantic A efectuează tranziția radiativă  $E_m \leftrightarrow E_n$ , atunci frecvența radiației emise sau absorbite depinde de distanța  $r(t)$  dintre parteneri la momentul considerat (gradul de suprapunere al funcțiilor de undă ale stărilor cuantice implicate în tranziție):

$$(8.1) \quad \omega_{mn}(t) = \frac{|E_m(r) - E_n(r)|}{\hbar}$$

Deoarece tranziția radiativă are loc într-un interval de timp mult mai mic decât intervalul timpului de ciocnire, se poate accepta că distanța  $r$  dintre parteneri nu se modifică în timpul tranziției; de aceea în diagrama din fig. 45 se poate considera că tranziția are loc pe "verticală".

În fig. 46 a este prezentată traiectoria clasică a sistemului cuantic B atunci când acesta se deplasează în apropierea sistemului A, în fig. 46 b este prezentată variația frecvenței de oscilație a sistemului A în timpul procesului de ciocnire (în intervalul de timp de ciocnire  $\tau_c$  se modifică frecvența tranziției), iar fig. 46 c ilustrează variația fazei de oscilație în acest interval de timp.

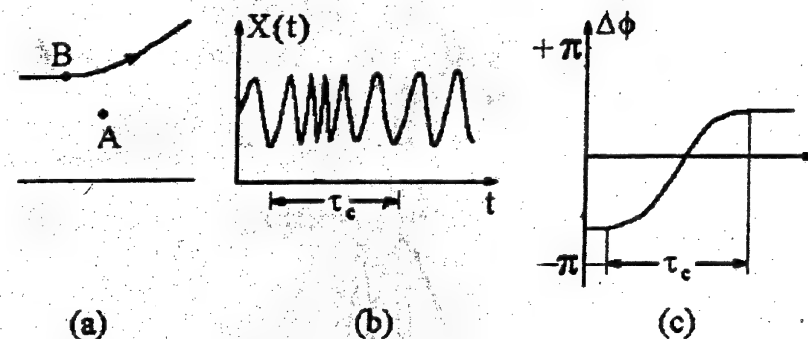


Fig. 46 a,b,c

Într-un sistem gazos constituit din sistemele cuantice A și B, distanța  $r(A, B)$  prezintă fluctuații aleatoare în jurul valorii medii  $r_m$ , care depind de presiune și temperatură. Frecvența radiației de fluorescență corespunzătoare tranziției  $E_m \leftrightarrow E_n$  va prezenta o distribuție aleatoare în jurul valorii cele mai probabile  $\omega_{mn}(r_m)$ , deplasată față de frecvența  $\omega_{0mn}$  a sistemului A neperturbat. Variația  $\Delta\omega = \omega_{0mn} - \omega_{mn}$  este determinată de variațiile individuale ale nivelurilor  $E_n$  și  $E_m$ , corespunzătoare distanței  $r_m(A, B)$  pentru care probabilitatea de emisie prezintă un maxim (fig. 47).

Deplasării în frecvență a tranziției spectrale determinată de ciocnirile elastice ( $\Delta E = \hbar\Delta\omega = \hbar\omega_0 - \hbar\omega$ ) îi corespunde o variație a energiei care provine din energia cinetică a partenerilor de ciocnire. Dacă deplasarea este pozitivă ( $\Delta\omega > 0$ ) atunci, ca rezultat al ciocnirii, energia cinetică se micșorează.

De ex. dacă  $a$  reprezintă distanța dintre sistemele atomice (neon) pentru care interacțiunea devine apreciabilă ( $a \cong 10^{-10}$  m), iar  $\bar{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$  reprezintă viteza medie termică ( $\bar{v} \cong 500$  m, pentru  $T = 300$  K și  $m_{Ne} = 20$ ), se obține:

$\Delta\tau_c \cong \frac{a}{v} \cong 10^{-13}$  s. Pentru frecvența  $\nu = 5 \cdot 10^{14}$  Hz, în acest interval de timp, câmpul *em* efectuează câteva zeci de oscilații complete. Prin urmare, în acest interval de timp frecvența tranziției se modifică în mod aleator ceea ce influențează lățirea tranziției spectrale.

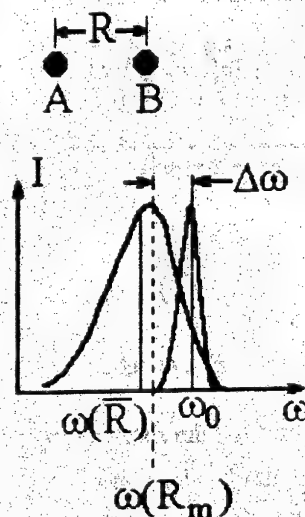


Fig. 47

Conturul intensității radiației emise, lărgit și deplasat datorită ciocnirilor, este de forma:

$$(8.2) \quad I(\omega) \propto \int A_{nm}(r) P_{cioc.}(r) [E_m(r) - E_n(r)] dr,$$

unde:  $A_{nm}(r)$  - probabilitatea emisiei spontane (depinde de distanța  $r$  deoarece funcția de undă electronică a perechii A,B depinde de  $r$ ), iar  $P_{cioc.}(r)$  reprezintă probabilitatea, calculată pentru unitatea de timp, ca valoarea distanței dintre sisteme să se afle în intervalul  $r \div r + dr$ . Relația (8.2) evidențiază faptul că profilul intensității liniei lărgite prin ciocniri conține informații numai despre diferența curbelor de potențial:

$$(8.3) \quad E_m(r) - E_n(r) = V[A(E_m), B] - V[A(E_n), B] = \hbar\omega_{mn}(r).$$

Dacă  $V(r)$  reprezintă potențialul de interacțiune dintre sistemul cuantic A aflat în starea fundamentală și partenerul de ciocnire (sistemul cuantic B), atunci probabilitatea ca, la echilibru termodinamic, sistemul B să fie dispus în intervalul

$r \div r + dr$  este proporțională cu factorul Boltzman  $\left[ \exp\left(-\frac{V(r)}{kT}\right) \right]$  și cu factorul

$4\pi r^2 dr$ , iar numărul de sisteme este:

$$n(r)dr = n_0 4\pi r^2 e^{-\frac{V(r)}{kT}} dr,$$

unde  $n_0$  reprezintă densitatea medie a sistemelor cuantice B.

Deoarece intensitatea unei linii de absorbție este proporțională cu densitatea sistemelor absorbante în timp ce ele formează perechile de ciocnire, conturul intensității unei linii de absorbție este dat de expresia:

$$(8.4) \quad I(\omega)d\omega = C^* \left\{ r^2 \exp\left[-\frac{V_m(r)}{kT}\right] \right\} \frac{d}{dr} [V_m(r) - V_n(r)] dr,$$

unde, conform relației (8.3), s-a considerat:

$$\frac{\hbar d\omega(r)}{dr} = \frac{d[V_m(r) - V_n(r)]}{dr}.$$

Din relația (8.4) se obține:  $\frac{dI(\omega, T)}{dT} = \frac{V_m(r)}{kT^2} I(\omega, T)$ , adică dacă se

înregistrează conturul liniei de absorbție funcție de temperatură se pot afla informații despre funcția de potențial a stării fundamentale. De multe ori, drept funcție de potențial se consideră modelul sferic de potențial de tip Lennard-Jones:

$$V(r) = \frac{a}{r^{12}} - \frac{b}{r^6},$$

unde coeficienții  $a$  și  $b$  se aleg astfel încât să se realizeze corespondența dintre teorie și măsurătorile experimentale.

Alături de ciocnirile elastice se produc și *ciocniri neelastice* în care energia de excitare  $E_m$  a sistemului cuantic A, dacă sunt îndeplinite anumite condiții cuantice caracteristice sistemului, este transferată, parțial sau total, în energie internă a partenerului de ciocnire B sau în energie de translație a ambilor parteneri.

Ciocnirile neelastice se divid în două categorii: *ciocniri neelastice de speța întâi* și *de speța a doua*. În primul caz energia cinetică a mișcării relative a partenerilor se transferă în energie internă, partenerii sau unul dintre ei regăsindu-se într-o stare energetică superioară excitată. În al doilea caz, unul dintre parteneri se găsește într-o stare energetică excitată și prin ciocnire neelastică trece într-o stare energetică inferioară, diferența de energie regăsindu-se sub formă de energie cinetică relativă.

În cazul ciocnirilor neelastice este posibil și transferul energiei de excitare, parțial sau total, de la un sistem la altul. Dacă transferul este parțial, o fracțiune din energia internă trece în energie cinetică. Procesul prezintă probabilitate maximă dacă



transferul este integral, adică la rezonanță. Efectul este cunoscut sub denumirea de *transfer rezonant de energie* sau *efect Penning*.

Ciocnirile neelastice sunt *proces neelastice*. După cum s-a stabilit în prg. IV 4, acest tip de ciocnire determină creșterea ratei de amortizare a energiei ( $\gamma_{m0} + \gamma_m^{\text{nerad}}$ ), respectiv creșterea lățimii energetice a nivelului. Ele sunt cunoscute și sub denumirea de *ciocniri de stingere*, deoarece conduc la micșorarea numărului de sisteme cuantice ce populează nivelul  $E_m$ , ceea ce determină micșorarea intensității radiației de fluorescență.

Pe de altă parte, atât ciocnirile elastice cât și cele neelastice perturbă "mișcarea internă" a sistemului atomic în așa fel încât faza mișcării după ciocnire față de faza anterioară ciocnirii, ia cu egală probabilitate orice valoare între  $(0 \div \pi)$  rad (fig. 46 c). Aceasta este echivalent cu "fragmentarea" procesului de emisie, ceea ce, din punct de vedere cuantic, corespunde micșorării timpului de viață al sistemului atomic în starea energetică considerată.

Probabilitatea relaxării totale  $A_m$  a nivelului energetic  $m$  este dată de suma probabilităților radiative și neradiative:

$$(8.5) \quad A_m = A_m^{\text{rad}} + A_m^{\text{nerad}} = \frac{1}{\tau_{\text{spontan}}} + ap_B, \quad a = 2\sigma_{mn} \sqrt{\frac{2}{\pi \mu kT}},$$

$$\text{unde: } A_m^{\text{nerad}} = n_B \sigma_m v, \quad v = \sqrt{\frac{8kT}{\pi \mu}}, \quad \mu = \frac{M_{AB}}{M_A + M_B}, \quad p = n_B kT.$$

Corespunzător lățirea spectrală este:

$$(8.5') \quad \delta\omega = \delta\omega_0 + \delta\omega_{\text{cioc}} = \gamma_0 + ap_B.$$

de aceea suplimentul este cunoscut și sub denumirea de *lărgire determinată de presiune*. La lărgirea determinată de presiune contribuie atât ciocnirile neelastice cât și cele elastice. Timpul mediu de viață al sistemelor atomice determinat de procesele de relaxare prin ciocniri neelastice, conform relației (III 2.1), exprimat funcție de secțiunea eficace transversală a procesului este dat de relația:

$$T_2 = \frac{1}{n_v \langle \sigma_c v \rangle} = \frac{1}{n_v k_c},$$

unde:  $n_v$  - densitatea sistemelor atomice,  $v$  - viteza relativă a sistemelor supuse ciocnirilor (de obicei, viteza termică),  $k_c$  - constanta de ciocnire caracteristică stării energetice a sistemului cuantic, iar medierea este extinsă asupra vitezelor.

În prg. IV 4 s-a stabilit că într-un ansamblu de dipoli electrici (sisteme atomice) de aceeași specie sau de specii diferite contribuția la lărgirea totală a tranziției a lărgirii prin ciocniri este proporțională cu densitatea (presiunea) speciei considerate. Experimental s-a stabilit că lărgirea determinată de ciocniri poate fi descrisă de o relație de forma (8.5'):

$$\Delta\omega = A + Bp,$$

unde  $A$  și  $B$  sunt mărimi constante care depind de constituenții ansamblului precum și de tranziția considerată. Factorul  $B$  poate fi diferit pentru diferite tranziții ale aceluiași sistem cuantic. Relația este cunoscută sub denumirea de *ecuația lui Stern-Vollmer*.

Calcul teoretice, confirmate de rezultate experimentale, au arătat că apare o modificare a conturului Lorentz (colizional) dependentă de frecvență. Lățimea spectrală, dependentă de frecvență, poate fi exprimată prin relația:

$$\Delta\omega = \Delta\omega_{0c} - C(\omega - \omega_0),$$

unde  $\Delta\omega_{0c}$  reprezintă lățimea colizională la care se adaugă un termen dependent de frecvență. Modificarea conturului spectral față de conturul Lorentz se manifestă în "aripile" conturului (la distanță de mai multe lățimi spectrale față de frecvența centrală).

Lățirea naturală (radiativă) și cea de ciocniri (neradiativă) a nivelului energetic este determinată de aceeași cauză (timpul de viață finit în starea energetică), deci caracteristicile celor două procese aleatoare vor fi aceleași. Ca rezultat conturul spectral al tranziției, a cărui lățire este determinat de aceste procese, va fi descris de aceeași funcție de tip Lorentz (8.12'). Lățimea energetică a tranziției va fi determinată de efectul combinat al lățirii radiative și a celei prin ciocniri:

$$(8.5' a) \quad \Delta\omega_{mn} = \gamma_m + \gamma_n + k_m + k_n.$$

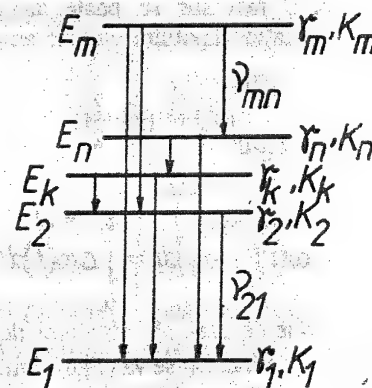


Fig. 48

În fig. 48 sunt prezentate unele tranziții posibile între diferite niveluri energetice ale unui sistem atomic. Considerăm cazul particular al tranziției dintre primul nivel energetic excitat ( $E_2$ ) și cel fundamental ( $E_1$ ). Nivelul excitat este caracterizat prin rata de amortizare radiativă  $\gamma_2 = \gamma$ , iar pentru cel fundamental  $\gamma_2 = \gamma$ .

Presupunem că ratele de ciocniri neelastice, caracteristice celor două niveluri sunt egale

( $k_2 = k_1 = k = \frac{1}{T_2}$ ). În aceste condiții lățimea spectrală a tranziției devine:

$$\Delta\omega_{12} = \gamma + \frac{2}{T_2},$$

adică s-a regăsit rezultatul (III 2.17), obținut din considerente clasice asupra procesului de ciocniri.

Din cele prezentate rezultă că atât ciocnirile elastice cât și cele neelastice determină lățirea tranziției spectrale, iar cele elastice determină și deplasarea în frecvență a tranziției funcție de curbele de potențial  $E_m(r)$  și  $E_n(r)$ . Analiza cantitativă a acestui fenomen se poate realiza pe baza modelului introdus de Weisskopf și dezvoltat de Lindholm și Sobelman, care au modelat sistemul cuantic excitat A supus ciocnirilor sistemului B, printr-un oscilator amortizat. În acest model ciocnirile neelastice amortizează amplitudinea oscilațiilor, prin urmare amortizarea totală este

$\gamma = \gamma_0 + \gamma_{\text{cioc}}$ . Ciocnirile elastice nu modifică amplitudinea, ci numai faza oscilatorului amortizat, determinată de deplasarea  $\Delta\omega(r)$  a frecvenței în timpul intervalului timpului de ciocnire, de aceea sunt cunoscute și sub denumirea de *ciocniri perturbatoare ale fazei*.

Pe baza modelului descris mai sus se poate analiza cantitativ procesul ciocnirilor. Evoluția în timp a elongației dipolului electric amortizat este descrisă de relația:

$$(8.6) \quad x(t) = x_0 e^{i\omega_0 t + i\eta(t) - \frac{\gamma}{2}t},$$

Termenul:

$$(8.7) \quad \eta(t) = \int_0^t [\omega(t) - \omega_0] dt = \int_0^t \Delta\omega(t) dt,$$

reprezintă sumarea asupra variațiilor de fază ale dipolului determinate de ciocnirile elastice în intervalul de timp  $0 \div t$ . La început se va neglija amortizarea determinată de tranzițiile radiative și ciocnirile neelastice ( $\gamma = 0$ ), considerând numai ciocnirile elastice. Dacă timpul de integrare este mare față de timpul mediu dintre două ciocniri

( $T = \frac{\Lambda}{\bar{v}}$ , unde:  $\Lambda$  - lungimea drumului liber mediu,  $\bar{v}$  - viteza medie relativă a

partenerilor de ciocnire) variația totală a fazei  $\eta(t)$  reprezintă sumarea asupra variațiilor aleatoare de fază, determinate de ciocniri caracterizate prin parametri de ciocnire diferiți. Variația medie a fazei calculată pe o ciocnire, este dată de corelația dintre oscilații înainte și după ciocnire, descrisă de funcția (unde se consideră relația (8.6)):

$$\phi(\tau) = \frac{1}{x_0^2} e^{-i\omega_0 \tau} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_{-t/2}^{+t/2} x^*(t') x(t' + \tau) dt' =$$

(8.8)

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_{-t/2}^{+t/2} e^{i[\eta(t' + \tau) - \eta(t')]} dt'$$

care corelează fazele dipolului la momentele  $t$  și  $t + \tau$ . În intervalul de timp  $\tau$ , variațiile lui  $\phi(\tau)$  depind de numărul de ciocniri și de mărimea medie a saltului de fază pe ciocnire. Relația (8.8) se multiplică cu  $\exp(-i\omega\tau)$  și se integrează pe intervalul:  $-\tau/2 \leq t' \leq +\tau/2$ .

$$\frac{x_0^2}{2\pi} \int_{-\tau/2}^{+\tau/2} \phi(\tau') e^{i(\omega_0 - \omega)\tau'} d\tau' =$$

(8.9)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{t} \int_{-t/2}^{+t/2} x^*(t') e^{i\omega t'} \left[ \int_{-t/2}^{+t/2} x(t' + \tau') e^{-i\omega(t' + \tau')} d\tau' \right] dt' \right\}$$

Integrarea după variabila  $\tau'$  nu trebuie să depindă de alegerea originii timpului, deci se poate modifica originea cu mărimea  $\tau$ , de la momentul  $t' + \tau$  la  $t'$ :

$$\frac{x_0^2}{2\pi} \int_{-\tau/2}^{+\tau/2} \phi(\tau) e^{i(\omega_0 - \omega)\tau} d\tau =$$

(8.9')

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{t} \int_{-t/2}^{+t/2} x^*(t') e^{i\omega t'} \left[ \int_{-t/2}^{+t/2} x(t') e^{-i\omega t'} dt' \right] \right\} = \text{TF}(xx^*) = I(\omega)$$

Partea dreaptă a relației (8.9') reprezintă transformata Fourier a pătratului elongației, deci reprezintă conturul intensității  $I(\omega)$  al liniei spectrale. Dacă se cunoaște funcția de corelație  $\phi(\tau)$ , pe baza acestei relații se poate stabili conturul spectral determinat de ciocnirile elastice.

Funcția de corelație se poate stabili dacă se consideră funcția (8.8) sub forma:

$$\phi(\tau) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_{-t/2}^{+t/2} e^{i\Delta\eta} dt' = \langle e^{i\Delta\eta(\tau)} \rangle$$

Variația fazei în intervalul de timp  $d\tau$  este:

$$(8.10) \quad d\phi(\tau) = \phi(\tau + d\tau) - \phi(\tau) = \langle e^{i\Delta\eta(\tau + \Delta\tau)} \rangle - \langle e^{i\Delta\eta(\tau)} \rangle = \langle e^{i\Delta\eta(\tau)} \rangle (e^{i\varepsilon} - 1)$$

unde  $\varepsilon = \Delta\eta\Delta\tau$  reprezintă deplasarea suplimentară a fazei în intervalul de timp  $d\tau$ . Deoarece saltul de fază determinat de ciocniri nu depinde de valoarea  $\eta$  a fazei înainte de ciocnire, se poate înlocui medierea în timp asupra produsului prin produsul factorilor mediați:

$$(8.10') \quad d\phi(\tau) = \langle e^{i\Delta\eta(\tau)} \rangle (e^{i\varepsilon} - 1) = \phi(\tau) (e^{i\varepsilon} - 1)$$

Se poate înlocui medierea în timp prin medierea pe ansamblu, care este echivalentă cu medierea asupra tuturor ciocnirilor. Dacă se consideră un ansamblu gazos, unde  $n_v$  reprezintă numărul de particule pe unitate de volum, numărul de ciocniri caracterizate prin parametrul de ciocnire localizat în intervalul  $r \div r + dr$  și în intervalul de timp  $d\tau$  este:

$$dZ = 2\pi r dr n_v \bar{v} d\tau,$$

unde:  $\bar{v}$  reprezintă viteza medie relativă. Medierea pe ansamblu conduce la:

$$\langle e^{i\varepsilon} - 1 \rangle = 2\pi n_v \bar{v} d\tau \int_0^\infty \langle e^{i\Delta\eta(r)} - 1 \rangle r dr = -n_v \bar{v} d\tau (\sigma_b - i\sigma_s), \text{ unde:}$$

$$(8.11 a) \quad \sigma_b = 2\pi \int_0^\infty [1 - \cos \eta(r)] r dr,$$

$$(8.11 b) \quad \sigma_s = 2\pi \int_0^\infty [\sin \eta(r)] r dr.$$

Integrarea relației (8.10') conduce la:

$$\phi(\tau) = e^{-n_v \bar{v} \tau (\sigma_b - i\sigma_s)}.$$

Considerând relația (8.9'), se obține conturul liniei spectrale:

$$(8.12) \quad I(\omega) = \frac{I_0}{2\pi} \frac{(n_v \bar{v} \sigma_b)^2}{(\omega - \omega_0 - n_v \bar{v} \sigma_s)^2 + (n_v \bar{v} \sigma_b)^2},$$

$$\text{unde:} \quad I_0 = \int_0^\infty I(\omega) d\omega.$$

Această relație evidențiază că în prezența ciocnirilor elastice conturul este de tip Lorentz cu lățimea spectrală:  $\delta\omega = 2n_v \bar{v} \sigma_b$  și deplasat față de centrul liniei cu  $\Delta\omega = n_v \bar{v} \sigma_s$ . Atât lățimea conturului, cât și deplasarea acestuia sunt proporționale

cu densitatea (presiunea) partenerilor de ciocnire și viteza lor medie relativă. De asemenea lățimea este proporțională cu  $\sigma_b$ , iar deplasarea cu  $\sigma_s$  (fig. 49).

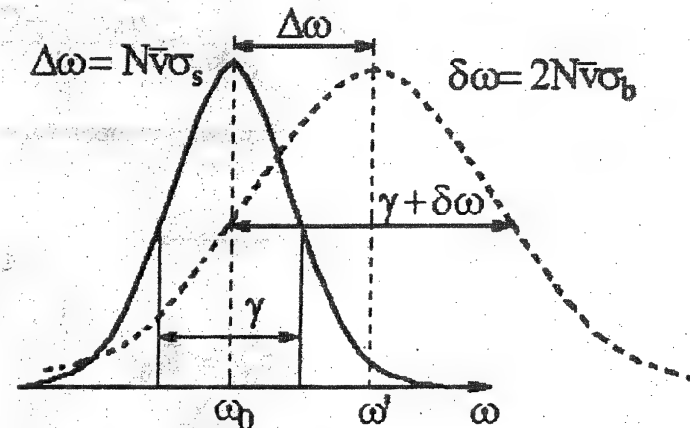


Fig. 49

Considerarea efectelor de amortizare prin emisie spontană și ciocniri neradiative se realizează prin includerea în relația (8.12) a constantei totale de amortizare  $\gamma = \gamma_0 + \gamma_{cioc}^{nerad}$ :

$$(8.12') \quad I(\omega) = \frac{I_0}{2\pi} \frac{\left(\frac{\gamma}{2} + n_v \bar{v} \sigma_b\right)^2}{(\omega - \omega_0 - n_v \bar{v} \sigma_s)^2 + \left(\frac{\gamma}{2} + n_v \bar{v} \sigma_b\right)^2}.$$

Valoarea secțiunilor transversale este determinată de curbele potențiale prin intermediul saltului de fază  $\eta(r)$ . Dacă curbele potențiale caracteristice nivelurilor energetice sunt de forma:

$$(8.13) \quad V_n(r) = \frac{C_n}{r^k} \text{ și } V_m(r) = \frac{C_m}{r^k},$$

variația frecvenței tranziției  $E_n \leftrightarrow E_m$  este dată de relația:

$$\hbar\omega_{mn}(r) = \frac{C_n - C_m}{r^k}.$$



Saltul de fază determinat de o ciocnire caracterizată prin parametrul de ciocnire  $I_0$ , neglijând împrăștierea particulei B și presupunând că parcursul lui B nu este reflectat ci urmează o linie dreaptă (fig. 50), este:

$$(8.14) \quad \eta(I_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta\omega dt = \frac{1}{\hbar} \int \frac{C_m - C_n}{[I_0^2 + \bar{v}^2(t-t_0)^2]^{k/2}} dt = \frac{\alpha_k (C_m - C_n)}{\bar{v} I_0^{k-1}},$$

unde:  $\alpha_k$  este o constantă numerică care depinde de valoarea exponentului  $k$ .

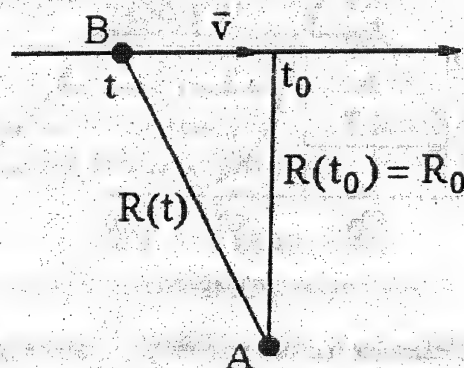


Fig. 50

Variația fazei poate fi pozitivă ( $C_n > C_m$ ) sau negativă, funcție de orientarea reciprocă a momentului cinetic și a celui de spin. În fig. 51 este prezentată variația fazei corespunzătoare tranziției  $3s \rightarrow 3p$  a atomului de Na supus ciocnirilor cu atomul de H, corespunzătoare la diferite stări moleculare adiabaticale ale sistemului  $\text{Na}^* \text{H}$ , pentru un domeniu larg de variație a parametrului de impact.

Dacă relația (8.14) se introduce în relațiile (8.11 a,b) se poate calcula valoarea secțiunilor transversale  $\sigma_s$  și  $\sigma_b$ . De ex. în cazul  $k=4$  contribuția principală la mărimea  $\sigma_b$  provine de la ciocnirile caracterizate prin valori mici ale parametrilor de impact, în timp ce pentru  $\sigma_s$  contribuția principală revine ciocnirilor caracterizate prin valori mari ale parametrilor de impact. Prin urmare ciocnirile elastice la distanțe mari nu determină largiri apreciable ale tranziției, însă determină deplasări mari ale centrului liniei.

Dacă potențialele de interacțiune sunt nemonotone, de ex. potențialul Lennard-Jones, în "aripile" conturului lărgit apar benzi "sateliți". Din structura acestora se pot obține informații relativ la potențialul de interacțiune.

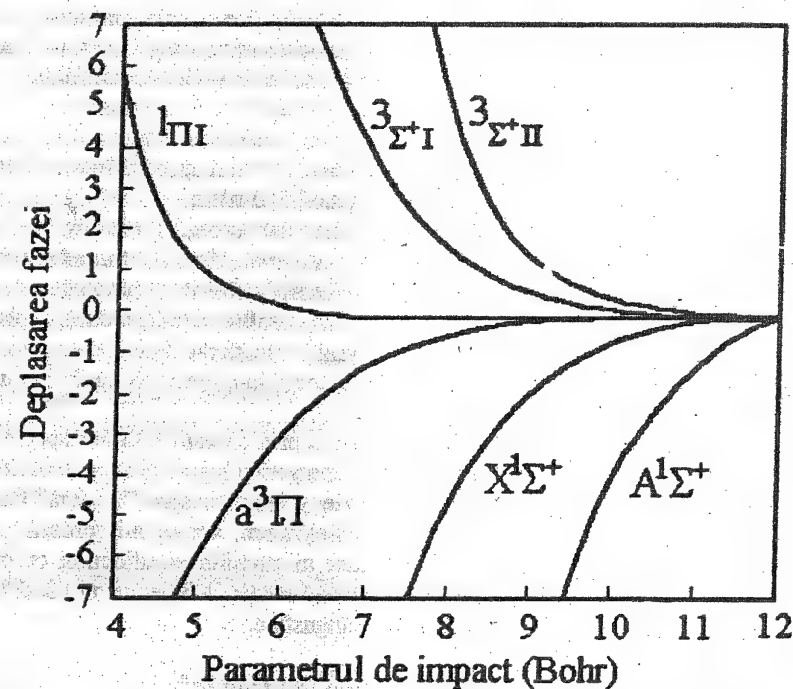


Fig. 51

Dacă relația (8.14) se introduce în relațiile (8.11 a,b) se poate calcula valoarea secțiunilor transversale  $\sigma_s$  și  $\sigma_b$ . De ex. în cazul  $k=4$  contribuția principală la mărimea  $\sigma_b$  provine de la ciocnirile caracterizate prin valori mici ale parametrilor de impact, în timp ce pentru  $\sigma_s$  contribuția principală revine ciocnirilor caracterizate prin valori mari ale parametrilor de impact. Prin urmare ciocnirile elastice la distanțe mari nu determină largiri apreciable ale tranziției, însă determină deplasări mari ale centrului liniei.

Dacă potențialele de interacțiune sunt nemonotone, de ex. potențialul Lennard-Jones, în "aripile" conturului lărgit apar benzi "sateliți". Din structura acestora se pot obține informații relativ la potențialul de interacțiune.

În plasmă și în descărcări în gaze, din cauza interacțiunilor de tip Coulomb la distanțe mari ale particulelor încărcate electric (electroni și ioni), descrise de potențialul (8.13), unde  $k=1$ , deplasarea în frecvență și lărgirea prin presiune sunt relativ mari. Acestea prezintă interes în laserii cu descărcări în gaze (laserul cu He-Ne sau cu argon ionizat). Interacțiunea dintre particulele încărcate poate fi descrisă prin efectul Stark liniar sau pătratic. Efectul Stark liniar determină numai lărgirea conturului spectral, în



timp ce efectul pătratic determină și deplasarea acestuia. Din măsurători asupra conturului liniilor se pot determina caracteristici detaliate ale plasmă (densitatea electronică, cea ionică și temperatura). Precizia măsurătorilor asupra conturului liniilor în plasmă poate fi mărită dacă pentru determinări se utilizează radiația laser. Modelurile clasice utilizate pentru explicarea lărgirii prin ciocniri și a deplasărilor pot fi îmbunătățite folosind calcule cuantice.

*Îngustarea conturului spectral determinat de ciocniri.* În domeniul spectral IR și de microunde, ciocnirile pot determina îngustarea conturului spectral în loc de lățirea acestuia (*îngustarea Dicke*). Aceasta se explică în modul următor.

Dacă timpul de viață al nivelului molecular superior (de ex. un nivel vibrațional excitat al stării electronice de bază) este mare față de timpul mediu de ciocnire, viteza oscilatorului este modificată de ciocnirile elastice, componenta vitezei medii devine mai mică decât în lipsa acestora și ca rezultat se micșorează deplasarea Doppler. În cazul în care lățirea Doppler este mai mare decât lățirea determinată de ciocniri, dacă drumul liber mediu este mai mic decât lungimea de undă a tranziției moleculare, acestea determină o îngustare a liniei.

Există și alt efect care determină îngustarea prin ciocniri a liniilor spectrale. În cazul timpilor de viață foarte mari ai nivelurilor energetice legate printr-o tranziție *em*, lățimea liniei este determinată de timpul de difuzie al atomilor spre "în afară" fascicului laser. Dacă se introduce un gaz nobil în celula-șanțion, acesta micșorează rata de difuzie și ca rezultat crește timpul de interacțiune ai atomilor șanționului cu câmpul laser, ceea ce determină o micșorare cu presiunea a lățimii liniei până când lățirea determinată de presiune compensează efectul de îngustare.

### 8.1 Lărgirea determinată de "timpul de tranzit".

Acest mecanism se manifestă în experimentele în care sistemele atomice se deplasează perpendicular pe direcția fascicului de radiație optică cu care interacționează, timpul de tranzitare a secțiunii fascicului fiind mic față de timpul mediu de viață  $T_1$  al tranziției determinat de emisia spontană, respectiv față de timpul mediu de defazare  $T_2$ .

Durata interacțiunii coerente dintre sistemul atomic și semnalul optic aplicat este limitată de timpul  $T_{tr}$  de tranzitare a secțiunii fascicului; ca rezultat se obține o lățire prin timp de tranzit  $\Delta\omega \approx \frac{1}{T_{tr}}$ . Dacă viteza termică a sistemelor atomice este de

ordinul  $v \approx 10^3$  m/s, iar lungimea parcursului pe care are loc interacțiunea este de câțiva mm se obține o lărgire de ordinul a  $10^5$  Hz. În cazul particular al tranzițiilor între nivelurile de rotație-vibrație ale moleculelor a căror timp mediu de viață spontan se află în domeniul milisecundelor, timpul de tranzit  $T = d/v$  al moleculelor caracterizate prin viteza termică medie  $v$  prin fasciculul laser a cărui diametru este  $d$

poate fi mai mic cu câteva ordine de mărime decât timpul de viață spontan al sistemului cuantic.

În asemenea cazuri, lățimea spectrală a tranziției moleculare neinfluențată de efectul Doppler nu mai este limitată de probabilitatea tranzițiilor spectrale, ci de timpul de tranzit prin fasciculul laser.

Mecanismul devine important în situații speciale:

- experimente de înaltă rezoluție asupra interacțiunii dintre fascicule moleculare de sisteme atomice care se deplasează cu viteză mare și fascicule de radiație optică focalizată într-un domeniu foarte mic.

- experimente în care se utilizează cuve cu lungime mare, conținând gaze la presiune scăzută, caracterizate prin tranziții cu timp de viață mare sau în experimente referitoare la standardele de frecvență laser de înaltă rezoluție.

Lățirea determinată de timpul de tranzit poate fi evidențiată în modul următor. Să considerăm un oscilator neamortizat  $x = x_0 \cos \omega_0 t$  care oscilează cu amplitudine constantă în intervalul de timp  $T$  și care poate să se oprească brusc din oscilație. Spectrul de frecvență se obține din transformata Fourier:

$$(8.1 a) \quad A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^T x_0 \cos(\omega_0 t) e^{-i\omega t} dt,$$

iar conturul intensității spectrale, pentru  $(\omega - \omega_0) \ll \omega_0$  este:

$$(8.1 b) \quad I(\omega) = A^* A = C \frac{\sin^2 \frac{\omega - \omega_0}{2} T}{(\omega - \omega_0)^2}.$$

Aceasta reprezintă o funcție cu semilățimea  $\delta\omega_T = \frac{5,6}{T}$ , respectiv cu lățimea totală

$\delta\omega_b = \frac{4\pi}{T} \approx \frac{12,6}{T}$  între punctele de zero dispuse de ambele părți ale maximului central.

Să considerăm un atom care traversează domeniul unui fascicul laser, unde variația intensității acestuia este descrisă printr-un contur rectangular (fig. 52 a). Amplitudinea oscilatorului  $x(t)$  este proporțională cu amplitudinea câmpului

$e(t) = E_0(r) \cos \omega_0 t$ . Dacă timpul de interacțiune  $T = \frac{d}{v}$  este mic față de timpul

de amortizare  $T = \frac{1}{\gamma}$ , în intervalul de timp  $T$  amplitudinea oscilațiilor poate fi considerată constantă. În acest caz, lățimea spectrală a liniei de absorbție este:

$$\delta\omega_b = \frac{5,6 v}{d} \rightarrow \delta v \approx \frac{v}{d}.$$

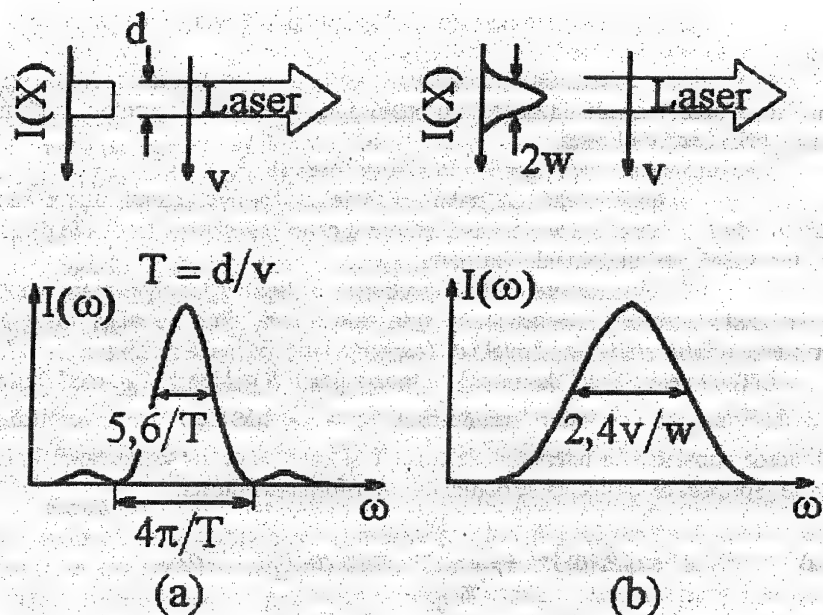


Fig. 52 a, b

În realitate distribuția câmpului în secțiunea transversală a unui fascicul laser care corespunde modului fundamental de oscilație este (fig. 52 b):

$$e = E_0 e^{-\frac{r^2}{w^2}} \cos \omega t,$$

unde  $2w$  reprezintă diametrul dimensiunii spotului fasciculului gaussian (măsurat în secțiunea fasciculului, între punctele unde  $e = E_0/e$ ). În acest caz, considerând amplitudinea oscilatorului forțat  $x = \alpha E$ , se obține profilul liniei gaussiene:

$$(8.2) \quad I(\omega) = I_0 \exp \left[ -(\omega - \omega_0)^2 \frac{w}{2v^2} \right],$$

care este caracterizat printr-o lățime limitată de timpul de tranzit de forma:

$$(8.3) \quad \delta\omega_{tt} = 2 \frac{v}{w} \sqrt{2 \ln 2} \approx 2,4 \frac{v}{w} \rightarrow \delta v \approx 0,4 \frac{v}{w}$$

Prin urmare lățimea determinată de timpul de tranzit poate fi micșorată fie măriind diametrul ( $2w$ ) al spotului fasciculului laser, fie micșorând viteza moleculară  $v$  (ambele metode au fost verificate experimental). Metoda cea mai eficientă constă în micșorarea vitezei atomilor prin "răcire optică".

Să acceptăm că frontul de undă al câmpului radiației laser este plan, iar moleculele se deplasează paralel cu acesta. Suprafețele de fază ale unui fascicul gaussian focalizat sunt curbate, exceptând planul din focar. Conform fig. 53, unde un atom se deplasează de-a lungul direcției  $r$ , perpendicular la fasciculul laser, apare o variație spațială a fazei:

$$(8.4) \quad \Delta\phi = x \frac{2\pi}{\lambda}, \text{ unde } r^2 = R^2 - (R-x)^2 \rightarrow x = \frac{r^2}{2R}, \text{ (dacă } x \ll R),$$

unde  $k = \frac{\omega}{c}$  - mărimea vectorului de undă, iar  $R$  - raza de curbură a frontului de undă. Această variație a fazei depinde de localizarea atomului; prin urmare, este diferită pentru diferiți atomi și conduce la lărgiri suplimentare ale tranziției spectrale. Pentru valoarea lățimii determinată de timpul de tranzit calculele au condus la o expresie care include și curbura frontului de undă:

$$(8.5) \quad \delta\omega = \frac{2v}{w} \sqrt{2 \ln 2} \left[ 1 + \left( \frac{\pi w^2}{R\lambda} \right)^2 \right] \approx \delta\omega_{tt} \left[ 1 + \left( \frac{\pi w^2}{R\lambda} \right)^2 \right] \approx \delta\omega_{tt} \sqrt{1 + \Delta\phi^2}$$

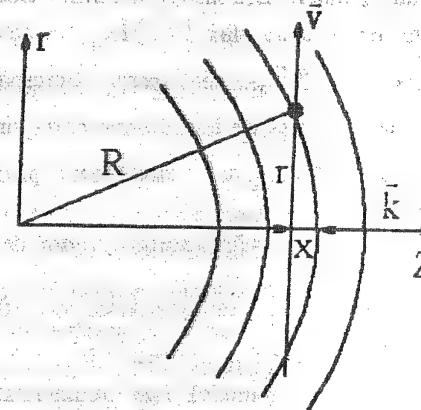


Fig. 53

Pentru a micșora această lățime suplimentară, raza de curbură trebuie să prezinte valoarea cea mai mare. Dacă  $\Delta\phi \ll \pi$ , pentru o distanță  $r = w$ , lărgirea determinată de curbura frontului de undă este mică față de lărgirea determinată de timpul de tranzit.

Aceasta impune razei de curbură condiția  $R \gg \frac{w^2}{\lambda}$ .

## Cap. VI

### INTERACȚIUNEA RADIAȚIEI OPTICE CU ANSAMBLUL DE SISTEME ATOMICE

#### 1. Propagarea radiației optice prin ansamblul de sisteme atomice.

Considerăm un ansamblu de sisteme atomice identice prin care se propagă un fascicul monocromatic de raze paralele. Din mulțimea stărilor energetice caracteristice sistemului atomic dat, considerăm două stări  $E_m > E_n$ , caracterizate prin lățimile energetice  $\Delta E_m$ , respectiv  $\Delta E_n$ . Frecvența corespunzătoare tranziției  $E_m \leftrightarrow E_n$  este  $\nu_{mn}$ , iar domeniul de interacțiune corespunzător tranziției este descris prin conturul spectral  $g(\nu_{mn}, \nu)$ , caracterizat prin lățimea spectrală:

$$\Delta \nu_{mn} = \frac{\Delta E_m + \Delta E_n}{h}. \text{ Cele două stări energetice sunt degenerate, factorii de degenerare fiind } g_m, \text{ respectiv } g_n, \text{ iar populația cu sisteme atomice este caracterizată prin densitățile de populație } n_m, \text{ respectiv } n_n.$$

Fasciculul de radiație monocromatică este caracterizat prin densitatea de energie  $\rho(\nu)$  și lățimea domeniului spectral  $\delta \nu$ , centrat pe frecvența  $\nu_s$ , unde  $\delta \nu \ll \Delta \nu_{mn}$ . Pentru a se realiza interacțiunea câmpului de radiație cu sistemele atomice este necesar ca domeniul spectral centrat pe frecvența  $\nu_s$  să fie cuprins în domeniul spectral al tranziției centrat pe frecvența  $\nu_{mn}$  (fig. 54). Interacțiunea câmpului de radiație optică cu ansamblul de sisteme atomice prin efectele de absorbție și emisie stimulată, determină modificarea densității de populație a stărilor energetice. Deoarece radiația obținută ca rezultat al emisiei spontane este neregulată, contribuția

acesteia la variația densității de energie pe direcția de propagare a fasciculului poate fi neglijată.

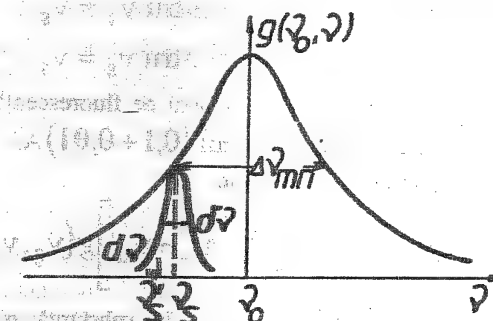


Fig. 54

Variația în timp a densității de populație a nivelului superior  $E_m$  ca rezultat al interacțiunii cu câmpul din domeniul  $\delta \nu$ , este dată de relația:

$$(1.1) \quad \frac{dn_m}{dt} \delta \nu = d\nu \rho(\nu_s') B_{nm} g(\nu_s', \nu_{mn}) n_m - d\nu \rho(\nu_s') B_{mn} g(\nu_s', \nu_{nm}) n_m = - \frac{dn_m}{dt} \delta \nu$$

Deoarece fiecărui proces de tranziție a unui sistem atomic între cele două niveluri îi corespunde un foton cu frecvența  $\nu_{mn}$ , relația (1.1) descrie în același timp variația numărului de fotoni determinată de concurența proceselor de absorbție și emisie forțată. Variația în timp a densității de energie corespunzătoare domeniului spectral  $\delta \nu$  se obține înmulțind relația (1.1) cu energia unui foton ( $h\nu_s'$ ):

$$(1.2) \quad \frac{d\rho(\nu_s')}{dt} \delta \nu = h\nu_s' \left( - \frac{dn_m}{dt} \right) = d\nu \rho(\nu_s') B_{nm} \left[ \frac{B_{mn}}{B_{nm}} n_m - n_n \right] g(\nu_s', \nu_{mn}) h\nu_s'$$

Pentru a determina variația densității de energie corespunzătoare domeniului spectral al semnalului inițial trebuie să se cunoască distribuția după frecvențe a densității inițiale de energie și să se integreze relația (1.2) pe domeniul de definiție al acesteia. În general



această dependență este greu de definit, dar în cazul sistemelor laser, deoarece  $\delta v \ll \Delta v_{mn}$ , poate fi definită printr-o funcțională  $\delta$  (câmp armonic), unde:

$$\delta(v'_s - v_s) = 0 \quad \text{pentru } v'_s \neq v_s$$

$$\delta(v'_s - v_s) = 1 \quad \text{pentru } v'_s = v_s$$

De ex. în cazul laserului cu rubin, lățimea benzii de fluorescență este aprox. 5 Å, în timp ce lățimea semnalului laser este de ordinul (0,1 ÷ 0,01) Å.

În aceste condiții relația (1.2) devine:

$$(1.3) \quad \frac{d\rho(v_s)}{dt} = \rho(v_s) B_{nm} \left[ \frac{B_{mn}}{B_{nm}} n_m - n_n \right] g(v_s, v_{nm}) h v_s.$$

În intervalul de timp  $dt$  radiația străbate în substanță o distanță  $dx$ , deci:

$$dt = \frac{dx}{v} = \frac{n}{c} dx, \quad \text{unde } n \text{ reprezintă indicele de refracție al substanței considerate.}$$

Variația densității spectrale a radiației care traversează stratul de substanță cuprins între  $x$  și  $x + dx$  este dată de relația:

$$(1.4) \quad \frac{d\rho(v_s)}{dx} = \rho(v_s) B_{nm} \left[ \frac{B_{mn}}{B_{nm}} n_m - n_n \right] g(v_s, v_{nm}) \frac{n}{c}.$$

Integrând relația (1.4) pe lungimea ( $L$ ) a materialului străbătută de radiație și folosind relația (IV 3.4) se obține expresia densității de radiație la ieșirea din material:

$$(1.5) \quad \rho(v_s, L) = \rho(v_s, 0) \exp \left\{ h v_s g(v_s, v_{nm}) B_{nm} \left[ \frac{g_n}{g_m} n_m - n_n \right] \frac{nL}{c} \right\}.$$

Dacă se introduce notația:

$$(1.6) \quad a(v_s) = \frac{h v_s n}{c} g(v_s, v_{nm}) B_{nm} \left[ n_n - \frac{g_n}{g_m} n_m \right],$$

unde  $a(v_s)$  reprezintă *coeficientul spectral de absorbție liniară* (coeficient de absorbție), atunci relația (1.6) ia forma legii de absorbție Bouguere-Lambert:

$$(1.7) \quad \rho(v_s, L) = \rho(v_s, 0) \exp[-a(v_s)L].$$

Mărimea  $a(v_s L)$  ( $m^{-1}$ ) este numeric egală cu inversul mărimii distanței de-a lungul căreia densitatea de radiație se micșorează de  $e$  ori. Dacă conturul tranziției  $g(v, v_{nm})$  nu depinde de densitatea de energie  $em$ , atunci pentru un mediu omogen (densitatea populației nu depinde de coordonate), mărimea  $a(v_s L)$  poate fi considerată constantă.

Mărimea  $K = \int a(v_s L) dv$ , unde integrala este extinsă la conturul tranziției, este cunoscută sub denumirea de *coeficient integral de absorbție*. Deoarece conturul tranziției este normat și suficient de îngust (în interiorul lui variația mărimii  $v$  este mică, deci mărimea  $h v$  poate fi scoasă de sub integrală, iar celelalte mărimi sunt constante), coeficientul integral de absorbție poate fi scris sub forma:

$$(1.8) \quad K = \frac{h v_{nm} B_{nm} n}{c} \left[ n_n - \frac{g_n}{g_m} n_m \right], \quad \text{deci:}$$

$$a(v) = g(v, v_{nm}) K.$$

Relația (1.5) arată că variația densității spectrale este determinată de contribuția simultană a celor două fenomene forțate, absorbția și emisia stimulată. Aceste procese sunt independente, iar probabilitatea lor nu depinde de popularea nivelurilor energetice. Dacă este prezent câmpul de radiație  $em$  cu frecvență egală cu frecvența tranziției, acestea apar dacă cele două niveluri ale tranziției sunt populate și dacă tranziția este permisă de către regulile cuantice de selecție.

Dacă  $\frac{n_m}{g_m} < \frac{n_n}{g_n}$ , coeficientul  $a(v)$  este pozitiv, iar densitatea de energie

scade cu distanța de pătrundere în substanță conform unei legi exponențiale. Absorbția măsurată la ieșirea fascicului din substanță reprezintă o *absorbție aparentă*, deoarece o parte din radiația absorbită este compensată de cea obținută prin emisie stimulată. Dacă substanța se află în echilibru termodinamic, popularea cu sisteme atomice a nivelurilor energetice depinde numai de temperatură și este descrisă de legea de distribuție

Boltzman:  $n_n = n_m e^{-\frac{\Delta E_{nm}}{kT}}$ . Popularea nivelului superior, indiferent de temperatură, este mai mică decât popularea celui inferior, deci se va observa atenuarea fascicului.

Prin comunicare în mod selectiv de energie substanței este posibilă crearea unei stări de neechilibru termodinamic în care popularea nivelului energetic superior să

fie mai mare decât cea a nivelului inferior:  $\frac{n_m}{g_m} > \frac{n_n}{g_n}$ . Situația realizată între cele două

niveluri energetice este cunoscută sub denumirea de *inversie de populație*, iar substanța în care s-a realizat această situație poartă denumirea de *mediu activ*. Energia comunicată substanței pentru a realiza o populare preferențială a unui nivel energetic față de altul poartă denumirea de *energie de pompaj*.

Mediul activ poate fi caracterizat prin *coeficientul de amplificare*:  $\alpha(v_s) = -a(v_s)$ . La propagarea fascicului de radiație prin mediul activ are loc creșterea densității spectrale de radiație, deci amplificarea acesteia conform relației:

$$(1.9) \quad \rho(v_s, L) = \rho(v_s, 0) \exp[\alpha(v_s)L].$$



Câmpul  $em$  extrage de la mediul activ energia preluată de acesta de la sursa de pompaj și înmagazinată sub formă de energie internă a sistemelor atomice.

Dacă densitățile populației celor două niveluri energetice sunt egale:

$\frac{n_m}{g_m} = \frac{n_n}{g_n}$ , atunci, față de fasciculul considerat, substanța se comportă ca și cum ar fi

transparentă. Dependența densității de energie de distanța de pătrundere în mediu, în cazurile analizate, este prezentată în fig. 55 (mărimea  $n_m/g_m$  descrie popularea unei stări a nivelului degenerat, deci relațiile prezentate mai sus se referă la densitatea de populație a stărilor energetice).

Din relația (1.8) rezultă că valoarea maximă a coeficientului de amplificare se obține dacă frecvența semnalului este egală cu frecvența corespunzătoare maximului conturului tranziției. Dacă conturul tranziției este de tip Lorentz se obține:

$$(1.10) \quad \alpha_L(\omega_0) = -a_L(\omega_0) = -\frac{2}{\pi\Delta\omega} K = \frac{2\hbar\omega_0 n B_{mn}}{\pi c \Delta\omega} \left( \frac{g_n}{g_m} n_m - n_n \right)$$

iar dacă este de tip Gauss:

$$(1.11) \quad \alpha_D(\omega_0) = -\frac{2\sqrt{\ln 2}}{\sqrt{\pi}\Delta\omega_D} K.$$

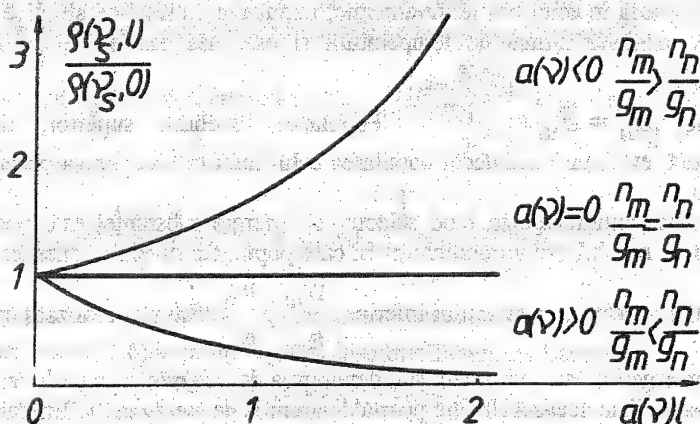


Fig. 55.

Din relația (1.11) rezultă că lățirea tranziției spectrale determină micșorarea valorii maxime a conturului spectral de absorbție (amplificare), respectiv micșorarea probabilității tranzițiilor forțate.

Să considerăm ansamblul de sisteme atomice în echilibru termodinamic, nivelul final al tranziției drept nivel fundamental, iar diferența energetică între cele două niveluri satisface condiția:  $kT \ll (E_m - E_n)$ . În acest caz majoritatea sistemelor atomice se află pe nivelul fundamental ( $n_n \approx n_v$ ,  $n_m \approx 0$ ), deci:

$$(1.12) \quad a(\omega_{1m}) = \frac{\hbar\omega_{1m} n B_{1m}}{c} n_v g(\omega_{1m}),$$

coeficientul de absorbție este proporțional cu densitatea de sisteme atomice absorbante. Dacă conturul spectral al tranziției  $1 \leftrightarrow m$  este de tip Lorentz, atunci expresia coeficientului de absorbție este de forma:

$$(1.13) \quad a_L(\omega_{1m}) = \frac{\hbar\omega_{1m} n_v B_{1m}}{c/n} \frac{2}{\pi\Delta\omega} \frac{1}{1 + \left( \frac{\omega - \omega_{1m}}{\Delta\omega/2} \right)^2}.$$

Dacă se compară relația (1.13) cu (III 2.12) se poate identifica expresia coeficientului Einstein ( $B_{mn}$ ) pentru fenomene forțate:

$$(1.14) \quad B_{mn} = \frac{\pi e^2}{4\hbar\epsilon_0 m_e \omega_{mn}}.$$

Deoarece conturul spectral este normat coeficientul integral de absorbție este dat de relația:

$$(1.15) \quad K_{1m} = \frac{\hbar\omega_{1m}}{c/n} n_v B_{1m},$$

adică este proporțional cu coeficientul Einstein pentru absorbție. Pe baza relației (1.15), determinând experimental valoarea coeficientului integral de absorbție se poate calcula valoarea mărimii  $B_{1m}$ , iar pe baza relației (V 3.6) se poate calcula valoarea mărimii  $A_{1m}$ .

### 1.1 Secțiunea transversală de absorbție; tăria oscilatorului.

Pe baza relației (1.12) se poate introduce mărimea fizică:  $\sigma(\omega) = \frac{a(\omega)}{n_v}$  care

caracterizează capacitatea fiecărui sistem atomic de a absorbi radiația  $em$  cu frecvența  $\nu$ . Deoarece are dimensiunile unei arii, mărimea se numește *secțiune transversală de absorbție* (*secțiune diferențială de absorbție*). Pentru o tranziție dată  $m \leftrightarrow n$ , se poate scrie:

$$(1.16) \quad \sigma_{mn}(\omega) = \frac{\hbar \omega_{mn}}{c/n} B_{mn} g(\omega, \omega_{mn}),$$

iar mărimea fizică denumită *secțiune integrală de absorbție* este dată de relația:

$$(1.17) \quad g_{mn} = \int_0^{+\infty} \sigma_{mn}(\omega) d\omega = \frac{\hbar \omega_{mn}}{c/n} B_{mn}.$$

Din relația (III 2.12) rezultă că valoarea secțiunii transversale integrale de absorbție în cazul dipolului de tip Lorentz este:

$$(1.18) \quad \sigma_{integr} = \frac{\pi e^2}{2\varepsilon_0 m_e c} \cong 1,17 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s},$$

reprezentând o constantă universală. Din punct de vedere clasic secțiunea transversală de absorbție nu depinde de frecvența proprie a dipolului electric, însă rezultatele experimentale conduc la valori diferite pentru diferite frecvențe. Înainte de a fi analizate fenomenele forțate în cadrul mecanicii cuantice, discordanța dintre modelul clasic de dipol electric atașat unei tranziții și rezultatele experimentale corespunzătoare aceleiași tranziții a fost depășită introducând pentru secțiunea integrală de absorbție a dipolului electric atașat tranziției, o expresie de forma:

$$\sigma_{integr} = \frac{\pi e^2}{2\varepsilon_0 m_e c} f,$$

unde  $f$  reprezintă un parametru empiric, denumit *tăria oscilatorului*, definit ca raportul (vezi prg IV 7):

$$(1.20) \quad f = \frac{\sigma_{masurat}}{\sigma_{integralclasic}}$$

În general toate rezultatele teoretice obținute pe baza modelului oscilatorului clasic pot fi aduse în concordanță cu valorile experimentale dacă se înlocuiește mărimea

$\frac{e^2}{m}$  cu  $\frac{e^2}{m} f$ . Calculele pe baza mecanicii cuantice înlătură necesitatea introducerii acestui parametru empiric.

## 1.2 Temperatura absolută negativă

Starea substanței în care s-a realizat inversia populației între două niveluri energetice (mediul activ) uneori este denumită și stare cu "temperatură absolută negativă". Aplicând legea de distribuție Boltzman celor două niveluri între care s-a realizat inversia, starea cu inversie de populație poate fi descrisă pur formal, introducând pentru cele două stări noțiunea de *temperatură absolută negativă*. Noțiunea nu are sens fizic ci numai un sens formal matematic, deoarece noțiunea de temperatură absolută caracterizează numai ansamblurile aflate în echilibru termodinamic.

Să considerăm un ansamblu de sisteme atomice aflat în echilibru termodinamic caracterizat prin temperatura absolută  $T$ . Pentru simplificare considerăm că sistemele atomice prezintă numai două stări energetice  $E_m > E_n$ . Densitatea totală de sisteme atomice se repartizează între cele două stări, conform legii Boltzman:

$$(1.21) \quad n_m = n_n \exp\left(-\frac{h\nu_{mn}}{kT}\right), \text{ unde: } n_m + n_n = n_v.$$

Din relația (1.21) se obține:

$$(1.22) \quad T = -\frac{h\nu_{mn}}{k \ln\left(\frac{n_n}{n_m}\right)} \quad (n_n > n_m, \text{ deci: } T > 0),$$

relație verificată de populațiile oricăror perechi de niveluri energetice ale sistemelor ansamblului aflat în echilibru termodinamic. Valoarea temperaturii obținută din relația (1.22) este independentă de valoarea frecvenței tranziției, precum și de densitatea de populație a celor două stări.

De asemenea din (1.21) rezultă:

$$(1.23) \quad \begin{aligned} (a) \quad n_m &= \frac{n_v}{1 + e^{h\nu_{mn}/kT}} \\ (b) \quad n_n &= \frac{n_v}{1 + e^{-h\nu_{mn}/kT}} \end{aligned}$$

iar diferența densităților de populație este:

$$(1.24) \quad \Delta n_{nm} = n_v \frac{e^{h\nu_{mn}/kT} - e^{-h\nu_{mn}/kT}}{2 + e^{h\nu_{mn}/kT} + e^{-h\nu_{mn}/kT}} = n_v \operatorname{th} \frac{h\nu_{mn}}{2kT}.$$

Dacă considerăm drept referențial o stare a cărei energie este egală cu zero, dispusă la mijloc între cele două stări considerate mai sus, densitatea totală de energie a ansamblului corespunzătoare stărilor energetice este dată de relația:

$$(1.25) \quad W = n_m E_m + n_n E_n = -\frac{n_v h\nu_{mn}}{2} \operatorname{th} \frac{h\nu_{mn}}{2kT}.$$

Dependența de temperatura ansamblului a diferenței densității populației celor două stări este prezentată în fig. 56 a, iar în fig. 56 b prezintă dependența de temperatură a densității energiei totale a ansamblului. În partea dreaptă temperatura ansamblului tinde la  $(+0 \text{ K})$ , prin urmare, conform legii de distribuție Boltzman, toate sistemele atomice vor popula nivelul inferior ( $\Delta n_{nm} \cong n_n \cong n_v$ ), iar densitatea de energie

are valoarea cea mai mică  $\left(W \cong -n_v \frac{h\nu_{mn}}{2}\right)$ . Odată cu creșterea temperaturii termodinamice a ansamblului, sistemele atomice populează și starea superioară, astfel

încât pentru  $T \rightarrow \infty$  se obține ( $n_m \approx n_n$ ), iar energia ansamblului prezintă o valoare finită.

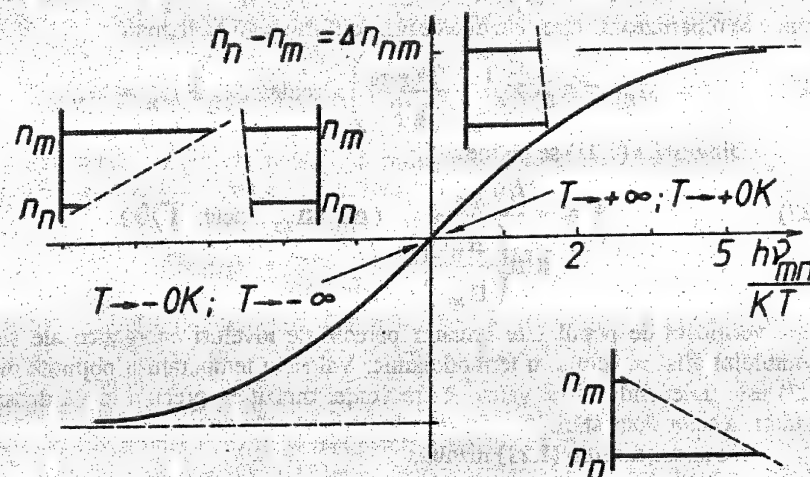


Fig. 56 a

Dacă printr-o metodă de populare selectivă între cele două niveluri energetice se realizează inversie de populație, atunci acestora formal le putem aplica legea distribuției Boltzman și atașa inversiei respective o temperatură absolută dată de relația:

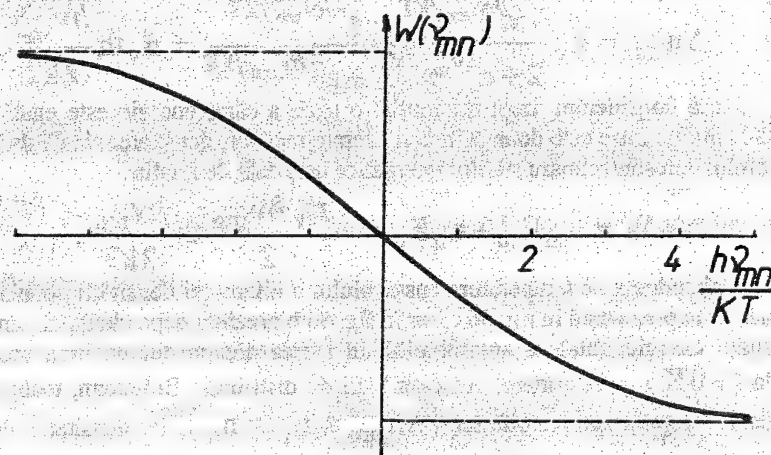


Fig. 56 b

$$(1.26) \quad T_{mn} = \frac{h\nu_{mn}}{k \ln \left( \frac{n_n}{n_m} \right)} \quad (n_n < n_m, \text{ deci: } T < 0).$$

În acest caz valoarea "temperaturii absolute negative" depinde de valoarea frecvenței tranziției, precum și de valoarea inversiei de populație. Analog cu cazul ansamblului în echilibru termodinamic, situației când ( $\Delta n_{nm} \approx -n_n \approx -n_v$ ) i se poate atașa temperatura  $T_{nm} \rightarrow -0K$ , iar energia ansamblului prezintă valoarea cea mai mare ( $W \approx n_v \frac{h\nu_{mn}}{2}$ ), iar situației când  $\Delta n_{nm} = 0$  ( $n_m \approx n_n$ ) i se va atașa temperatura  $T_{nm} \rightarrow -\infty K$ . Conceptul de temperatură absolută negativă este atașat unei tranziții și unei inversii date de populație a tranziției considerate.

## 2. Interacțiunea câmpului *em* al RCN cu ansamblul de sisteme atomice

În continuare va fi analizată interacțiunea dintre ansamblul de sisteme atomice și câmpul *em* al radiației corpului negru (RCN). (Uneori câmpul RCN este cunoscut și sub denumirea de *radiație termică*, *fluctuații termice* sau *zgomot*). În cele ce urmează RCN va reprezenta *mediul înconjurător* (*rezervorul*) *em* al sistemului considerat (ansamblul de sisteme atomice).

### 2.1 Densitatea spectrală de energie a RCN

Pe baza considerentelor termodinamicii se poate arăta că un volum spațial delimitat față de mediul înconjurător și aflat în echilibru termic cu acesta, conține câmp *em* caracterizat prin mărimea fizică *densitate de energie* a RCN. Densitatea de energie, respectiv mărimile caracteristice câmpului *em* al RCN - intensitatea câmpului electric -  $e(r, t)$  și inducția câmpului magnetic -  $b(r, t)$  - depind numai de temperatura caracteristică volumului spațial considerat și de cea a mediului înconjurător din vecinătatea imediată și nu depind de mărimea și forma volumului (dacă dimensiunile volumului sunt mari față de lungimea de undă a radiației *em* considerate). Mărimile  $e$  și  $b$  ale RCN sunt mărimi fizice reale, măsurabile, cu bandă spectrală largă asemănătoare zgomotului, a căror amplitudine, fază și polarizare au caracter aleator.

Densitatea de energie a RCN, conform teoriei lui Planck, este dată de relația:

$$(2.1) \quad \rho(\omega)_{RCN} d\omega = \frac{8\pi}{\lambda^3} \frac{\hbar d\omega}{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{kT_r}\right) - 1},$$



unde mărimea  $T_r$  reprezintă temperatura "mediului înconjurător", adică temperatura pereților delimitanți ai volumului care absorb energie  $em$  și determină valoarea densității de energie  $em$ , iar mărimea  $\rho(\omega)_{RCN}$  - energia corespunzătoare unității de frecvență și de volum, în domeniul de frecvență  $d\omega$ , centrat pe valoarea  $\omega$ . În orice domeniu spectral  $d\omega$ , centrat pe frecvența  $\omega$ , densității de energie RCN i se poate asocia o valoare medie pătratică a intensității câmpului electric, prin relația:

$$(2.2) \quad \rho(\omega)_{RCN} d\omega = \frac{\varepsilon}{2} d|\tilde{E}_{RCN}|^2.$$

Folosind relațiile (2.1, 2.2), se poate stabili expresia modului fazorului intensității câmpului electric al RCN:

$$(2.3) \quad d|\tilde{E}_{RCN}|^2 = \frac{16\pi}{\varepsilon\lambda^3} \frac{\hbar d\omega}{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{kT_r}\right) - 1},$$

o mărime fizică ce poate fi măsurată, funcție de  $\omega$  și  $T_r$ , folosind un receptor cu zgomot redus.

## 2.2 Tranziții stimulate de către RCN

Un sistem atomic ce aparține ansamblului de sisteme delimitat de volumul considerat poate interacționa cu câmpul electric al RCN prezentă în acest volum. Acest câmp determină tranziții forțate a căror rată se poate calcula. Pentru a face aprecieri calitative, vom considera un contur al tranziției de tip Lorentz a cărui lățime spectrală este foarte îngustă față de domeniul spectral al RCN.

Probabilitatea diferențială a proceselor forțate va fi (I 2.3, 2.5):

$$dW_{12,RCN} = dW_{21,RCN} = \frac{3^*}{8\pi^2} \frac{\gamma_{rad}}{\hbar\Delta\omega_a} \frac{\varepsilon\lambda^3}{1 + \left[\frac{2(\omega - \omega_a)}{\Delta\omega_a}\right]^2}$$

(Deoarece polarizarea câmpului electric -  $\tilde{E}_{RCN}$  - este aleatoare, factorul  $(3^*)$  este egal cu unitatea).

Probabilitatea integrală a fenomenelor forțate corespunzătoare tranziției  $1 \Leftrightarrow 2$ , determinate de RCN, se obține prin integrarea pe conturul tranziției:

$$(2.4) \quad W_{12,RCN} = W_{21,RCN} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{8\pi^2} \frac{\gamma_{rad}}{\hbar\Delta\omega_a} \frac{\varepsilon\lambda^3}{1 + \left[\frac{2(\omega - \omega_a)}{\Delta\omega_a}\right]^2} \times$$

$$\times \frac{16\pi}{\varepsilon\lambda^3} \frac{\gamma_{rad}}{\hbar\Delta\omega_a} \frac{\hbar d\omega}{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{kT_r}\right) - 1} =$$

$$= \frac{\gamma_{rad}}{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{kT_r}\right) - 1} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2}{\pi\Delta\omega_a} \frac{d\omega}{1 + \left[\frac{2(\omega - \omega_a)}{\Delta\omega_a}\right]^2} = \frac{\gamma_{rad}}{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{kT_r}\right) - 1}.$$

(Pe domeniul spectral al conturului tranziției, valoarea energiei RCN s-a aproximat cu valoarea ei pentru frecvența  $\omega = \omega_a$ ).

Conform relației (2.4), rata tranzițiilor forțate de către RCN între două niveluri energetice depinde numai de coeficientul de amortizare radiativ ( $\gamma_{rad}$ ) al nivelului superior și de factorul Boltzmann corespunzător temperaturii radiației și nu depinde de caracteristicile conturului tranziției. Aceste tranziții se produc în mod continuu, în ambele sensuri; ele nu pot fi blocate deoarece ansamblul de sisteme atomice se află tot timpul în câmpul RCN. (Acestea ar putea fi înlăturate dacă temperatura ansamblului ar tinde la valoarea zero absolut). Existența acestor tranziții stimulate implică transferul de energie de la câmpul RCN la ansamblul de sisteme atomice, proporțional cu densitatea diferenței populației ( $\Delta n = n_1 - n_2$ ) între cele două niveluri.

Acest transfer de energie ridică problema echilibrului termic dintre ansamblul de sisteme atomice, caracterizat prin "temperatura atomică" ( $T_a$ ) definită de distribuția Boltzmann și câmpul RCN, caracterizat prin temperatura termodinamică ( $T_r$ ).

Pentru a rezolva această problemă, trebuie considerat faptul că fiecare sistem atomic care populează starea energetică superioară a tranziției poate reveni spre starea inferioară prin emisie spontană (relaxare radiativă), caracterizată prin coeficientul de relaxare radiativă ( $\gamma_{rad}$ ). Tranzițiile spontane sunt independente de prezența RCN. Ca rezultat al acestor tranziții, sistemele atomice transferă mediului  $em$  înconjurător (RCN), o anumită cantitate de energie care contribuie la realizarea echilibrului termic.

## 2.3 Echilibrul termic

dintre ansamblul de sisteme atomice și RCN.

În fig. 57 este prezentată diagrama schimbului de energie între RCN (caracterizată prin temperatura -  $T_r$ ) și ansamblul de sisteme atomice (caracterizat prin temperatura -  $T_a$ ) prin intermediul proceselor de emisie spontană și a celor forțate. Să calculăm raportul fluxului de energie cedat "mediului înconjurător" (RCN) de către ansamblul de sisteme aflat în echilibru termodinamic prin fenomenele de emisie



stimulată și spontană la fluxul de energie primit de la RCN prin fenomenul forțat al absorbției. Folosind relația (2.4) și raportul Boltzmann al populațiilor se obține:

$$(2.5) \quad \frac{\text{flux cedat}}{\text{flux primit}} = \frac{(W_{21,RCN} + \gamma_{rad})n_2}{W_{12,RCN}n_1} =$$

$$= \frac{\frac{\gamma_{rad}}{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{kT_r}\right) - 1} + \gamma_{rad}}{\frac{\gamma_{rad}}{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{kT_r}\right) - 1}} \exp\left(-\frac{\hbar\omega_a}{kT_a}\right) = \exp\left[\frac{\hbar\omega}{k}\left(\frac{1}{T_r} - \frac{1}{T_a}\right)\right]$$

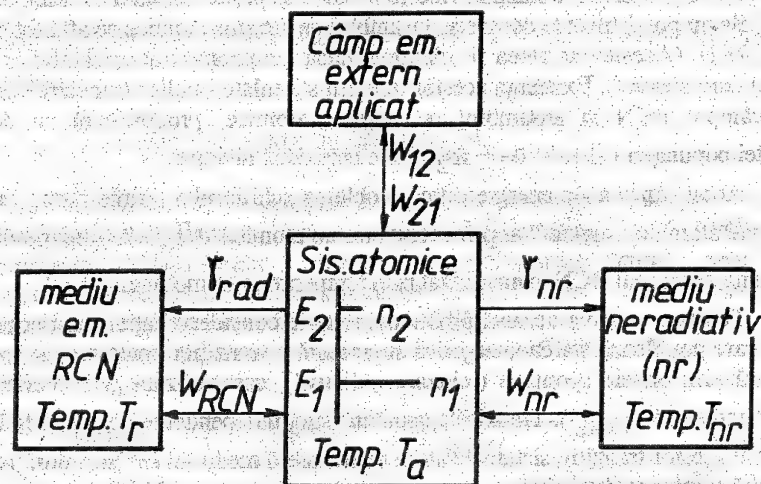


Fig. 57

Relația (2.5) arată că pentru a exista echilibru termic între cele două sisteme (RCN și ansamblul de sisteme atomice) este necesar ca cele două temperaturi termodinamice să fie egale. În acest caz, deși există interacțiuni, nu va exista transfer de populație între cele două niveluri, deci nici transfer de energie între cele două sisteme macroscopice.

Pot fi analizate două cazuri:

- Dacă ansamblul de sisteme atomice sau o parte a acestuia, pentru un interval de timp, se află în echilibru termodinamic (populația nivelelor energetice satisface raportul Boltzmann, iar mișcarea internă a sistemelor atomice este complet

defazată) caracterizat prin temperatura  $T_a$  diferită de temperatura  $T_r$  a RCN (a pereților incintei), atunci între cele două sisteme (rezervoare termice) are loc o "scurgere" de energie, de la cel cu temperatură mai ridicată spre cel cu temperatura mai scăzută până la egalizarea acestora. Datorită modificării temperaturii  $T_a$ , va exista o modificare a populației nivelurilor energetice, astfel încât noua distribuție să corespundă temperaturii de echilibru  $T_a$ .

- Dacă într-un ansamblu de sisteme atomice, printr-o metodă selectivă, între două niveluri energetice, s-a realizat inversie de populație caracterizată printr-o "temperatură"  $T_a(v_{mn})$  (1.26) diferită de  $T_r$ , de asemenea va avea loc "scurgere" de energie până la egalizarea temperaturilor, iar raportul populațiilor va fi fixat de raportul Boltzmann corespunzător temperaturii finale.

Rezultă că în cazul echilibrului termic între RCN și ansamblul de sisteme atomice, cele trei "canale" de schimb de energie sub formă de radiație optică (RCN, tranziții stimulate de către zgomot și tranziții spontane) se echilibrează prin corelare reciprocă (fig. 58); existența a două "canale" implică și pe al treilea. Pentru a exista corelare reciprocă trebuie să se realizeze un "bilanț detaliat" nu numai reciproc între tranziții, ci și în interiorul tranzițiilor, pe componentele cu diferite frecvențe. Aceasta presupune că o tranziție trebuie să prezinte exact același contur spectral atât pentru emisie spontană, cât și pentru fenomenele stimulate: de tip Lorentz, Gauss sau de alte tipuri (vezi relația (2.4)).

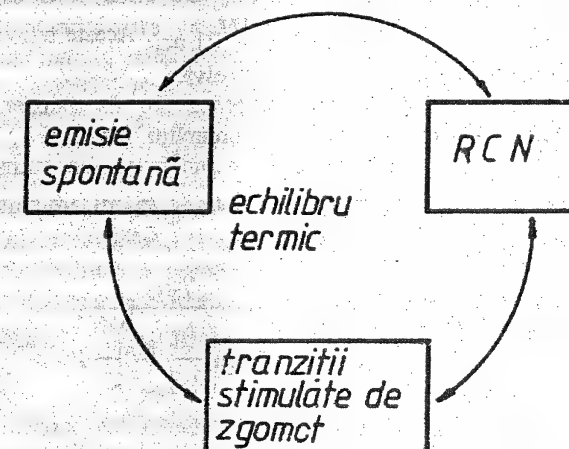


Fig. 58

De asemenea, rezultă că populația unui nivel energetic se poate relaxa "în jos" prin procese radiative (emisie spontană) și emisie stimulată (relaxare determinată de interacțiunea cu mediul em înconjurător) având ca rezultat transferul de energie de la

sistemul atomic la mediul *em* înconjurător, în același timp, trebuie considerată și relaxarea populației "în sus", prin care sistemul atomic primește energie de la mediul *em* și efectuează tranziții spre nivelul energetic superior. Rata acestor procese depinde de populația nivelurilor energetice, în cazul particular al echilibrului termodinamic, de raportul Boltzmann al populațiilor.

## 2.4 Relaxarea neradiativă.

În prg. 2.3 s-a analizat amortizarea energiei unui ansamblu de sisteme atomice corespunzătoare unui nivel energetic al sistemului atomic determinată de procesele de relaxare radiativă și de interacțiunea dintre sisteme și mediul înconjurător *em* (RCN). Însă procesul de amortizare a energiei se realizează și prin "tranziții neradiative", determinate de interacțiunea sistemelor cu așa numitul "mediu înconjurător neradiativ" (partea dreaptă fig. 57). Acest mediu cu care se pot cupla sistemele atomice se concretizează, de ex. printr-o rețea cristalină-matrice dopată cu sisteme atomice active-laser, un solvent-lichid în care sunt solvite sisteme moleculare active-laser, alte sisteme atomice cu care se pot ciocni sistemele atomice active-laser sau pereții tubului de descărcare.

Procesul de amortizare neradiativă este caracterizat prin coeficientul de amortizare neradiativ  $\gamma_{nr}$ . Prin acest proces ansamblul de sisteme atomice schimbă energie cu "mediul înconjurător neradiativ". Din aceleași considerente termodinamice, prezentate în prg. 2.2, trebuie să acceptăm posibilitatea că "mediul înconjurător neradiativ" este capabil să determine în ansamblul de sisteme atomice "tranziții stimulate neradiativ" între nivelurile energetice ale sistemului, caracterizate prin probabilitățile tranziției stimulate  $W_{12,nr}$  și  $W_{21,nr}$ . Aceste tranziții suplimentare pot fi considerate drept tranziții de relaxare neradiativă.

Pentru a analiza bilanțul detaliat al proceselor de transfer energetic între ansamblul de sisteme atomice și "mediul înconjurător neradiativ", analog cu cele prezentate în prg. 2.2, trebuie să acceptăm că rata tranzițiilor stimulate neradiativ ( $W_{12,nr}$ , respectiv  $W_{21,nr}$ ), este legată de rata de amortizare neradiativă, printr-o relație asemănătoare cu (2.4):

$$(2.6) \quad W_{12,nr} = W_{21,nr} = \frac{\gamma_{nr}}{\exp\left(\frac{\hbar\omega_a}{kT_{nr}}\right) - 1}$$

sau, în general:

$$(2.6') \quad W_{ji,nr} = \frac{g_i}{g_j} W_{ij,nr} = \frac{\gamma_{ji,nr}}{\exp\left(\frac{\hbar\omega_a}{kT_{nr}}\right) - 1}$$

unde  $T_{nr}$  - reprezintă "temperatura" caracteristică "mediului înconjurător neradiativ".

În condițiile echilibrului termic, dacă relația (2.5) este îndeplinită, puterea schimbată de "mediul neradiativ" cu ansamblul de sisteme atomice prin intermediul tranzițiilor stimulate va fi compensată de cea cedată de către ansamblu "mediului înconjurător neradiativ" prin "proces de relaxare neradiativă". Prin urmare trebuie să acceptăm că "mediul înconjurător neradiativ" determină "tranziții stimulate termic" "în sus" respectiv "în jos".

În cele prezentate, s-a considerat pe de o parte ansamblul de sisteme atomice caracterizat prin temperatura  $T_a$  și ratele de amortizare radiativă ( $\gamma_{rad}$ ) și neradiativă ( $\gamma_{nr}$ ), iar pe de altă parte "mediul înconjurător *em* - RCN", caracterizat prin temperatura  $T_r$ , respectiv "mediul înconjurător neradiativ" caracterizat prin temperatura  $T_{nr}$ . În general valorile celor două temperaturi ( $T_r$  și  $T_{nr}$ ) sunt egale, însă pot fi create situații în care acestea nu sunt egale. De ex. dacă considerăm "mediul înconjurător neradiativ" complet fără pierderi și transparent în domeniul frecvențelor de interes față de câmpul *em*, atunci cele două "medii înconjurătoare" pot fi considerate independente. În aceste condiții se poate realiza situația în care valorile mărimilor  $T_r$  și  $T_{nr}$  sunt diferite. De ex. prin răcirea unui cristal temperatura  $T_{nr}$  caracteristică vibrațiilor rețelei cristaline, devine mult mai mică față de temperatura  $T_r$  a mediului *em* - RCN".

Pentru a exemplifica aceste tranziții să analizăm câteva cazuri.

### a) Interacțiunea fononică

Vom considera un mediu-gazdă (matrice) sub forma unei rețele cristaline dopată cu sisteme atomice care pot deveni active-laser, acestea formând ansamblul de sisteme atomice, iar rețeaua va reprezenta "mediul înconjurător neradiativ".

Rețeaua cristalină prezintă vibrații termice la orice temperatură finită. Acestea li se asociază unde acustice, care în volumul ocupat de rețea formează un sistem de unde staționare. La fel ca și în cazul unei cavități ce conține câmp *em*, undele acustice sunt caracterizate prin diferite frecvențe (valoarea acestora variază de la zero până la valoarea corespunzătoare distrugerii rețelei), diferite direcții de propagare față de sistemul de referință al cristalului și diferite polarizări. Analog cu cazul câmpului *em*, acestor unde li se asociază o pseudoparticulă cunoscută sub denumirea de *fonon*. Vibrațiile termice ale rețelei pot fi caracterizate printr-o temperatură a "mediului înconjurător neradiativ" -  $T_{nr}$ . Intensitatea vibrațiilor rețelei va tinde la zero numai dacă  $T_{nr} \rightarrow 0$  K.

Undele acustice pot interacționa cu sistemele atomice potențial-active care dozează rețeaua cristalină, determinând tranziții stimulate între două niveluri energetice convenabile ale acestora. Această interacțiune (cuplaj), exprimată prin "interferența" funcției de undă a stării energetice a sistemului atomic dispus în rețeaua cristalină și funcția ce descrie vibrațiile acustice, este asemănătoare cu cuplajul dintre același sistem atomic (dipol electric) (funcția de undă a stării energetice) și câmpul *em* înconjurător (unda *em* sau modulurile câmpului *em*). Intensitatea ambelor cuplaje este de același ordin de mărime și relativ slabă.

Din cauza acestei interacțiuni semnalul acustic sub forma oscilațiilor rețelei ale căror frecvențe se află în domeniul frecvenței tranziției ( $\omega_a$ ) între două niveluri energetice ale sistemului atomic poate determina fenomene forțate între nivelurile considerate. Mărimea acestora va depinde de densitatea diferenței populațiilor și caracteristicile tranziției (conturul spectral, lățimea spectrală a conturului).

Dacă în ansamblul de sisteme atomice se realizează inversia de populație este posibilă amplificarea unei acustice considerate, ceea ce va determina apariția oscilațiilor rețelei cristaline la frecvența tranziției considerate a sistemului atomic. Se realizează în acest mod așa numiții "laseri acustici" sau "maseri acustici", a căror existență a fost demonstrată experimental în special în domeniul de frecvență al microundelor, folosind aceleași metode de pompaj și materiale ca și în cazul generării oscilațiilor *em* la aceleași frecvențe (pe aceleași tranziții atomice).

#### b) Cazul ciocnirilor neelastice în gaze.

Considerăm un amestec de gaze format din două componente A și B, în care există posibilitatea ca sistemul atomic A, prin ciocnire neelastică cu sistemul B, să-i transfere o parte din energia internă (de excitare), aceasta contribuind la creșterea energiei cinetice a sistemului atomic B. Pentru sistemul atomic A, acest proces reprezintă o formă de relaxare neradiativă caracterizată prin rata amortizării neradiative  $\gamma_{nr}$  (conf. prg. IV 8 mărimea  $\gamma_{nr}$  va fi direct proporțională cu densitatea (presiunea parțială) a sistemelor atomice de tip B).

Din considerentele termodinamice prezentate anterior, deoarece există transfer de energie de la ansamblul de sisteme atomice A - la "mediul înconjurător neradiativ" (ansamblul de sisteme atomice B) - prin relaxări neradiative, trebuie să acceptăm posibilitatea că aceleași ciocniri pot determina "tranziții stimulate prin ciocniri", între cele două niveluri energetice ale sistemului atomic A "în sus", respectiv "în jos" cu ratele  $W_{12,nr}$ , respectiv  $W_{21,nr}$ , date de relația (2.4), unde  $T_{nr}$  caracterizează mișcarea cinetică a ansamblului B ("mediul înconjurător neradiativ"). Aspectul fizic al reacției inverse a mișcării cinetice a ansamblului de sisteme atomice B, asupra ansamblului de sisteme A, în care ar trebui să rezulte "tranziții stimulate prin ciocniri" nu este direct evident; în același timp nu este încă evidentă posibilitatea utilizării inversiei de populație a sistemelor atomice de tip A pentru a "amplifica prin tranziții stimulate prin ciocniri" mișcarea cinetică a ansamblului de sisteme atomice de tip B. Înșă este evident faptul că cele două "rezervoare" considerate sunt cuplate, fluctuațiile termice ale mediului înconjurător neradiativ (rezervorul B) pot determina tranziții stimulate termic "în sus" și "în jos" în "ansamblul de sisteme atomice A". Reamintim că ciocnirile dintre sistemele atomice contribuie la lărgirea tranziției omogene prin două căi. Dacă ciocnirile sunt elastice, acestea determină efecte de defazare a mișcării, contribuind la lărgire cu mărimea  $(2/T_2)$ , direct proporțională cu frecvența ciocnirilor (presiunea gazului). Dacă ciocnirile sunt neelastice acestea determină atât lărgirea prin defazarea mișcării, cât și lărgirea prin amortizare neradiativă (micșorarea timpului de viață a sistemului atomic pe nivelul energetic considerat).

### 2.5 Rata relaxării totale a tranzițiilor.

Datorită interacțiunii ansamblului de sisteme atomice cu mediul înconjurător *em*, respectiv cu "mediul înconjurător neradiativ", rata depopulării celor două niveluri energetice (fig. 59) este dată de relațiile:

$$(2.7) \quad \left. \frac{dn_2}{dt} \right|_{\text{relaxare "în jos"}} = (W_{21,RCN} + \gamma_r + W_{21,nr} + \gamma_{nr})n_2 = w_{21}n_2$$

$$\left. \frac{dn_1}{dt} \right|_{\text{relaxare "în sus"}} = (W_{12,RCN} + W_{12,nr})n_1 = w_{12}n_1$$

Mărimile prezente în relația (2.7), din punct de vedere fizic reprezintă:

- $W_{mn,RCN}$ , respectiv  $W_{nm,RCN}$  - probabilitatea proceselor forțate sub acțiunea RCN (mediului *em* înconjurător) (stimulare termică);
- $\gamma_{mn,rad}$ , respectiv  $\gamma_{mn,nr}$  - probabilitatea relaxării stării superioare *m* spre starea inferioară *n* prin procese radiative, respectiv neradiative;
- $W_{mn}$ , respectiv  $W_{nm}$  - probabilitatea relaxării totale a nivelelor *m*, respectiv *n*.

În analiza prezentată stimularea tranzițiilor este determinată de interacțiunea cu câmpul *em* al RCN. Acestea pot fi de asemenea stimulate simultan și de interacțiunea cu orice alt semnal *em* extern (pompaj optic sau câmp *em* extern) cu condiția îndeplinirii cuplajului în frecvență între câmp și tranziție) (fig. 57). Probabilitatea acestor procese forțate este notată cu  $W_{mn}$ , respectiv  $W_{nm}$ . Intensitatea componentei electrice a semnalului *em* extern este inclusă în expresia probabilității procesului forțat.

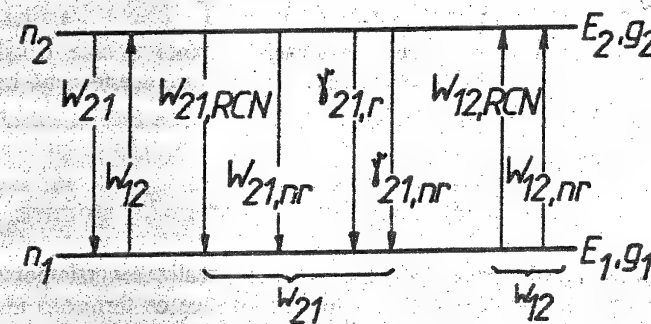


Fig. 59



Dacă se consideră că  $T_r = T_{nr} = T$ , iar ansamblul de sisteme atomice se află în echilibru termic cu "mediul înconjurător", atunci raportul dintre probabilitatea relaxării totale "în sus" și "în jos" (2.4, 2.6) este egal cu raportul Boltzmann:

$$(2.8) \quad \frac{w_{12}(\uparrow)}{w_{21}(\downarrow)} = e^{-\frac{E_2 - E_1}{kT}}, \text{ sau: } \frac{w_{ij}(\uparrow)}{w_{ji}(\downarrow)} = \frac{g_j}{g_i} e^{-\frac{E_j - E_i}{kT}},$$

dacă nivelurile 1 și 2 sunt degenerate, unde indicii  $i, j$  indică subnivelurile.

Rata relaxării "în sus" este totdeauna mai mică decât cea a relaxării "în jos" (relaxarea spontană plus relaxarea forțată). Raportul Boltzmann nu depinde de natura sau intensitatea mecanismelor de relaxare considerate, ci numai de temperatura  $T$ . Dacă "mediul înconjurător radiativ", respectiv "neradiativ" se află la temperaturi diferite, atunci expresia raportului (2.8) este mai complicată.

Deoarece pentru domeniul vizibil al spectrului:  $\frac{\hbar\omega_a}{k} \approx 25000 \text{ K}$ , dacă temperatura ansamblului de sisteme atomice este:  $T = 3000 \text{ K}$ , atunci:

$$\exp\left(-\frac{\hbar\omega_a}{kT}\right) \approx \exp\left(-\frac{25000}{300}\right) \approx 10^{-36}$$

În aceste condiții valoarea termenilor corespunzători relaxării stimulate este neglijabilă față de cea a relaxării spontane, deci probabilitățile de relaxare, în acest caz pot fi approximate prin:

$$(2.9) \quad \begin{aligned} w_{nm}(\uparrow) &\approx 0 \\ w_{mn}(\downarrow) &= \gamma_{mn} = \gamma_{mn,rad} + \gamma_{mn,nr} \end{aligned}$$

condiții cunoscute sub denumirea de *aproximația frecvenței optice*.

Dacă este îndeplinită condiția  $\hbar\omega \ll kT$  (cazul laserilor din domeniul microundelor și cel al rezonanței magnetice), atunci trebuie considerați termenii relaxării forțate. Cazul tranzițiilor IR este cuprins între aceste două cazuri extreme și necesită o analiză concretă.

### 3. Cinetica populării nivelurilor energetice ale sistemelor atomice

Pentru a stabili condițiile în care se poate realiza inversia populației între două niveluri energetice ale unor sisteme atomice identice ce formează un ansamblu, este necesar să se cunoască cinetica populării nivelurilor cu sisteme atomice în prezența pompajului. Pentru aceasta este necesar să se alcătuiască și să se rezolve ecuațiile ce descriu cinetica (ecuațiile de bilanț sau ecuațiile ratelor) populării nivelurilor energetice corespunzătoare. În acest scop trebuie să se cunoască: sistemul de stări energetice, tranzițiile permise între aceste stări, precum și probabilitatea tranzițiilor între diferite niveluri.

Sistemul atomic real prezintă un număr foarte mare de niveluri energetice ( $E_i$ ), cu diferite grade de degenerare ( $g_i$ ), a căror densitate de populație depinde de timp  $n_i(t)$  (fig. 60). Între diferite perechi de niveluri pot apare procese de relaxare permise de regulile cuantice de selecție; de asemenea sistemul atomic poate fi perturbat simultan (pe mai multe tranziții) dacă asupra lui acționează un câmp *em* extern complex ce conține radiații optice cu frecvențe ce sunt în rezonanță cu unele frecvențe ale tranzițiilor sistemului  $\omega_{mi} = (E_m - E_i)/\hbar$ . Pentru a asigura condiția de interacțiune a semnalului extern numai cu o tranziție dată, presupunem că frecvențele de rezonanță ale tranzițiilor cărora li se aplică semnale externe diferă una de alta cel puțin prin câteva lățimi spectrale.

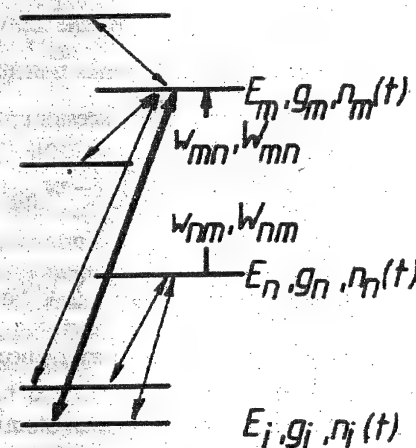


Fig. 60

Considerăm nivelul energetic  $E_m$  și un nivel superior sau inferior față de acesta. Între aceste două niveluri se realizează relaxarea populațiilor prin:

- relaxare radiativă sau năradiativă și prin interacțiune cu "mediul înconjurător RCN" sau "mediul înconjurător neradiativ" (probabilitate de relaxare totală  $W_{mi}$ );

- și prin interacțiune cu câmpul *em* extern caracterizat prin frecvența  $\omega_{mi}$ , caracterizat prin probabilitatea  $W_{mi}$ .

Cinetica populării nivelului  $E_m$  este descrisă de o ecuație asemănătoare cu (2.7):

$$\frac{dn_m}{dt} = -\frac{dn_i}{dt} = -W_{mi}n_m + W_{im}n_i - w_{mi}n_m + w_{im}n_i.$$



unde probabilitatea proceselor forțate este descrisă de o relație de forma (1 2.3, 2.5):

$$W_{mi} = \frac{g_i}{g_m} W_{im} = \frac{3^* \gamma_{im,rad}}{8\pi^2 \hbar \Delta\omega_{mi}} \frac{\varepsilon \lambda_{mi}^3 |\tilde{E}_{mi}|}{1 + \left[ \frac{2(\omega - \omega_{mi})}{\Delta\omega_{mi}} \right]^2},$$

dacă tranziția este omogenă de tip Lorentz.

Evoluția în timp a populației nivelului  $E_m$  în cazul sistemului atomic real *multinivel* este determinată pe de o parte de toate relaxările între acest nivel și celelalte niveluri superioare sau inferioare, iar pe de altă parte de relaxările forțate dintre acest nivel și alte niveluri, dacă nivelul  $E_m$  participă la formarea unor tranziții cărora li se aplică semnale *em* externe rezonante ( $\omega_{mi}$ ). Aceste semnale *em* externe nu vor interacționa între ele, deși nivelul  $E_m$  este comun tranzițiilor. Evoluția în timp a populației  $n_m(t)$  este descrisă de sumarea tuturor acestor procese:

$$\frac{dn_m}{dt} = \sum_{m \neq i} (-W_{mi} n_m + W_{im} n_i) + \sum_{m \neq i} (-w_{mi} n_m + w_{im} n_i), \text{ sau:}$$

$$(3.1) \quad \frac{dn_m}{dt} = \sum_{m \neq i} -(W_{mi} + w_{mi}) n_m + \sum_{m \neq i} (W_{im} + w_{im}) n_i.$$

Dacă sistemul atomic prezintă  $M$  niveluri energetice importante se vor obține  $M$  ecuații diferențiale de tipul (3.1).

Pe de altă parte densitatea ( $n_v$ ) a sistemelor atomice se va repartiza pe cele  $M$  niveluri ale sistemului, deci trebuie îndeplinită condiția:

$$(3.2) \quad \sum_{m=1}^M n_m(t) = n_1(t) + n_2(t) + \dots + n_M(t) = n_v,$$

care reprezintă legea conservării numărului de sisteme atomice. Ca rezultat din cele  $M$  ecuații diferențiale numai  $(M-1)$  sunt liniar independente.

Dacă se consideră că tranziția spectrală a mediului activ este relativ îngustă, atunci, pe domeniul spectral al tranziției, mărimea  $\rho(\omega)$  poate fi considerată constantă, iar expresia coeficienților Einstein (IV 3.6) ia forma:

$$\int b_{mi}(\omega) \rho(\omega) d\omega = \rho(\omega_{mi}) \int b_{mi}(\omega) d\omega = B_{mi} \rho(\omega_{mi}).$$

Această relație poate fi utilizată pentru a calcula probabilitatea tranziției în canalul de pompaj.

În canalul de generare, lățimea spectrală a radiației generate este îngustă față de lățimea conturului de absorbție, deci:

$$\int b_{mi}(\omega) \rho(\omega) d\omega = b_{mi}(\omega_g) \int \rho_{mi}(\omega) d\omega \approx b_{mi}(\omega_g) \rho_{mi}(\omega_g) \Delta\omega_g.$$

unde  $\omega_g$  - frecvența radiației generate, iar:  $\int \rho_{mi}(\omega) d\omega = \rho(\omega_g) \Delta\omega_g$  - densitatea integrală a radiației generate.

În procesul de interacțiune dintre ansamblul de sisteme atomice *multinivel* și câmpul *em* extern care conține mai multe frecvențe în rezonanță cu frecvența unor tranziții se poate stabili un regim staționar (independent de timp) al populației nivelurilor ( $n_{i,ss} \rightarrow ss$  - stare staționară). În aceste condiții setul (3.1) format din  $(M-1)$  ecuații diferențiale devine un set de  $(M-1)$  ecuații algebrice liniare, cuplate între ele de tipul:

$$(3.3) \quad \sum_{m \neq i} -(W_{mi} + w_{mi}) n_m + \sum_{m \neq i} (W_{im} + w_{im}) n_i = 0,$$

la care se adaugă legea conservării numărului de sisteme atomice (3.2). Dacă se cunosc valorile probabilităților  $W_{mi}$  și  $w_{mi}$  se poate calcula valoarea populației  $n_{i,ss}$  a fiecărui nivel energetic.

#### 4. Inversia de populație

Obținerea inversiei populației între două niveluri energetice ale unui ansamblu de sisteme atomice este determinată de procesele elementare care se produc la tranziția între o serie de niveluri ale sistemului. În majoritatea cazurilor nu este necesară analiza tuturor tranzițiilor posibile între toate nivelurile. Pot fi considerate numai tranzițiile care prezintă contribuție esențială la modificarea populației celor două niveluri energetice sub acțiunea sursei externe de pompaj față de popularea acestora în cazul când ansamblul de sisteme atomice se află în echilibru termodinamic. Pentru a putea efectua analiza condițiilor de realizare a inversiei de populație, se folosește o schemă simplificată în care un grup de niveluri este înlocuit printr-un nivel echivalent, caracterizat de timpul de viață efectiv  $\tau_m$ . Popularea cu sisteme atomice a unui nivel energetic la un moment dat este rezultatul concurenței proceselor de populare prin fenomene spontane și forțate și a celor de depopulare prin mecanisme de relaxare. Depopularea unui nivel energetic se realizează prin tranziții radiative și neradiative.

Considerând aceste simplificări, se pot deosebi materiale potențial active care pot fi reprezentate prin scheme cu două, trei și patru niveluri energetice, prin intermediul cărora se realizează inversia populației. La toate tipurile de scheme energetice, nivelul cel mai de jos reprezintă nivelul fundamental al sistemului atomic.

##### 4.1 Schema cu două niveluri energetice

Considerăm un sistem cu două niveluri energetice  $E_1$  și  $E_2$ , din care cel inferior ( $E_1$ ) reprezintă starea fundamentală a sistemului atomic. Dacă  $kT \ll (E_2 - E_1)$ , în condițiile echilibrului termodinamic, toate sistemele atomice

populează nivelul energetic inferior. Cele două niveluri sunt caracterizate prin factorii de degenerare  $g_1$  și  $g_2$  și densitățile populației  $n_1$  și  $n_2$  (fig. 61 a).

Dacă ansamblul de sisteme atomice este supus unui pompaj optic la frecvența  $\nu = \nu_{12} = \frac{E_1 - E_2}{h}$ , caracterizat prin densitatea spectrală energetică  $\rho_p(\nu_{12})$ , atunci alături de tranzițiile spontane au loc și tranziții forțate care contribuie la variația în timp a populării nivelurilor energetice. Dacă între procesele ce determină popularea unui nivel se realizează un regim staționar, se pot scrie relațiile:

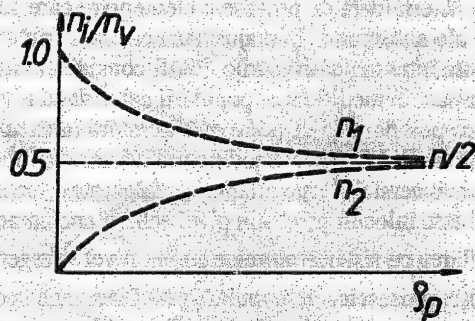
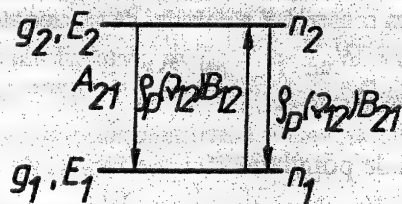


Fig. 61 a,b

$$(4.1) \quad \begin{aligned} \text{a)} \quad \frac{dn_1}{dt} &= (A_{21} + \rho_p B_{21})n_2 - \rho_p B_{12}n_1 = 0 \\ \text{b)} \quad \frac{dn_2}{dt} &= \rho_p B_{12}n_1 - (A_{21} + \rho_p B_{21})n_2 = 0 \\ \text{c)} \quad n_v &= n_1 + n_2 \end{aligned}$$

Considerând relația:  $g_1 B_{12} = g_2 B_{21}$ , populațiile sunt date de expresiile:

$$(4.2) \quad \text{a)} \quad n_2 = \frac{\frac{g_2}{g_1} B_{21} n_v}{\frac{A_{21}}{\rho_p} + B_{21} \left(1 + \frac{g_2}{g_1}\right)} \quad \text{b)} \quad n_1 = \frac{\left(\frac{A_{21}}{\rho_p} + B_{21}\right) n_v}{\frac{A_{21}}{\rho_p} + B_{21} \left(1 + \frac{g_2}{g_1}\right)}$$

Dacă densitatea energetică a sursei de pompaj devine foarte mare, populațiile tind la valorile:  $n_1 \rightarrow \frac{g_1}{g_1 + g_2} n_v$ ;  $n_2 \rightarrow \frac{g_2}{g_1 + g_2} n_v$ . Chiar dacă  $g_2 > g_1$ , între cele două niveluri nu se poate realiza inversia populației prin pompaj optic sau prin descărcări în gaze. Popularea celor două niveluri degenerate, pentru  $\rho_p \rightarrow \infty$  devine

$$\text{egală: } \frac{n_2}{g_2} = \frac{n_1}{g_1} = \frac{n_v}{g_1 + g_2}. \text{ În cazul nivelurilor nedegenerate se obține:}$$

$$n_1 = n_2 = \frac{n_v}{2}.$$

Variația populației nivelurilor nedegenerate funcție de densitatea energiei de pompaj este prezentată în fig. 61 b. Dacă  $\rho_p \rightarrow \infty$ , populațiile se egalează, deci mediul devine "transparent" pentru radiația cu frecvența  $\nu_{12}$ , iar coeficientul de absorbție  $a(\nu_{12}) \rightarrow 0$ . În acest caz inversia populației se poate obține numai dacă pentru popularea celor două niveluri se folosesc mecanisme diferite și anume metode de sortare spațială a sistemelor atomice. De ex. în cazul maserului cu amoniac sau cel cu hidrogen molecular inversia populației se realizează prin metode neoptice.

#### 4.2 Schema cu trei niveluri energetice

Funcție de dispunerea nivelurilor între care se realizează inversia populației se deosebesc două tipuri de scheme cu trei niveluri energetice. În primul caz nivelul final al tranziției laser este chiar cel fundamental (fig. 62 a), iar în al doilea caz este nivelul excitat  $E_2$  (fig. 62 b). Pentru simplificare presupunem nivelurile energetice nedegenerate ( $g_1 = g_2 = g_3 = 1$ ).

Spre deosebire de schema cu două niveluri energetice, în acest caz canalul de pompaj ( $E_1 \Rightarrow E_3$ ) este diferit de canalul nivelurilor energetice între care se realizează inversia de populație ( $E_2 \Rightarrow E_1$ ), respectiv ( $E_3 \Rightarrow E_2$ ). Aceasta permite realizarea pompajului atât cu surse optice cât și cu ajutorul descărcărilor în gaze.

Presupunem că pompajul se realizează prin metode optice în canalul  $(E_1 \Rightarrow E_3)$ , iar excitarea datorită pompajului în canalele  $(E_2 \Rightarrow E_3)$  și  $(E_1 \Rightarrow E_2)$  este neglijabilă. Procesele de relaxare  $(E_3 \Rightarrow E_2)$  sunt caracterizate prin probabilitatea de relaxare:

$$w_{32} = A_{32} + \gamma_{nr,32} = \frac{1}{\tau_{32}},$$

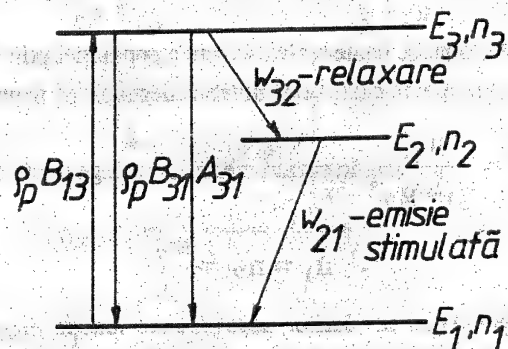


Fig. 62 a

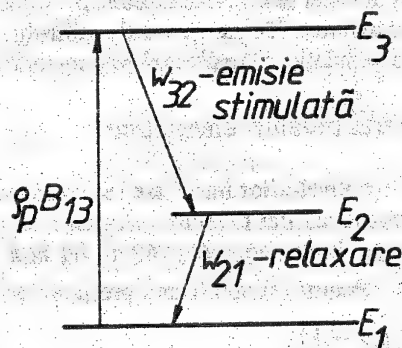


Fig. 62 b

unde  $A_{32}$  caracterizează relaxarea radiativă, iar  $\gamma_{32, nr}$  pe cea neradiativă. Ecuațiile cinetice care descriu evoluția populației nivelurilor în cazul sistemului de tipul întâi sunt:

$$(4.3) \quad \begin{aligned} a) \quad \frac{dn_3}{dt} &= \rho_p B_{13} n_1 - \rho_p B_{31} n_3 - n_3 \left( \frac{1}{\tau_{32}} + \frac{1}{\tau_{31}} \right), \\ b) \quad \frac{dn_2}{dt} &= \rho B_{12} n_1 - \rho B_{21} n_2 + \frac{n_3}{\tau_{32}} - \frac{n_2}{\tau_{21}} \end{aligned}$$

unde  $\rho$  reprezintă densitatea de energie cu frecvența  $\nu_{21}$  obținută ca rezultat al proceselor stimulate între nivelurile  $E_3 \Leftrightarrow E_2$ . Deoarece densitatea de sisteme atomice a ansamblului  $(n_v)$  este distribuită între cele trei niveluri energetice, există relația:

$$(4.3) \quad c) \quad n_1 + n_2 + n_3 = n_v,$$

de unde rezultă:  $\frac{dn_1}{dt} + \frac{dn_2}{dt} + \frac{dn_3}{dt} = 0$ , deci:

$$\frac{dn_1}{dt} = \rho (B_{21} n_2 + B_{12} n_1) + \rho_p (B_{31} n_3 - B_{13} n_1) + \frac{n_3}{\tau_{31}} + \frac{n_2}{\tau_{21}}.$$

Considerăm cazul când materialul activ nu este introdus într-o cavitate rezonantă, deci densitatea de radiație  $\rho(\nu_{32})$  este suficient de mică încât pot fi neglijate procesele stimulate între nivelurile  $E_1 \Leftrightarrow E_2$ . Ecuațiile cinetice în regim staționar devin:

$$(4.4) \quad \begin{aligned} a) \quad \frac{dn_3}{dt} &= \rho_p B_{13} n_1 - \rho_p B_{31} n_3 - \frac{n_3}{\tau_3} = 0 \\ b) \quad \frac{dn_2}{dt} &= \frac{n_3}{\tau_{32}} - \frac{n_2}{\tau_{21}} = 0, \text{ de unde:} \\ c) \quad n_1 + n_2 + n_3 &= n_v \end{aligned}$$

$$(4.5) \quad \begin{aligned} a) \quad n_3 &= \frac{\tau_{32} n_v}{\tau_{21} + 2\tau_{32} + \frac{\tau_{32}}{\tau_3 \rho_p B_{31}}} \\ b) \quad n_2 &= \frac{\tau_{21} n_v}{\tau_{21} + 2\tau_{32} + \frac{\tau_{32}}{\tau_3 \rho_p B_{31}}} \end{aligned}$$



$$c) \quad n_1 = \frac{\left( \tau_{32} + \frac{\tau_{32}}{\tau_3 \rho_p B_{31}} \right) n_v}{\tau_{21} + 2\tau_{32} + \frac{\tau_{32}}{\tau_3 \rho_p B_{31}}}$$

Variația densității populației funcție de densitatea de energie a sursei de pompaj este prezentată în fig. 63. La densități mari de energie ( $\rho_p \rightarrow \infty$ ) populațiile tind la valorile:

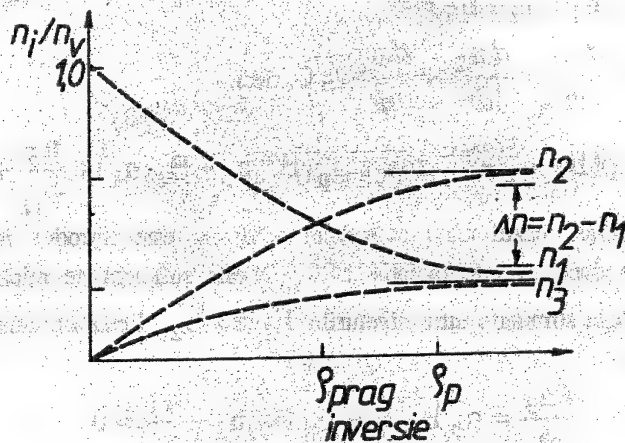


Fig. 63

$$n_1, n_3 \rightarrow \frac{\tau_{32} n_v}{\tau_{21} + 2\tau_{32}} \rightarrow 0, n_2 \rightarrow \frac{\tau_{21} n_v}{\tau_{21} + 2\tau_{32}}, \text{ dacă: } \tau_{21} \gg \tau_{32}.$$

Dacă:  $\tau_{21} \gg \tau_{32}$ , începând cu valoarea  $\rho_{\text{prag inversie}}$  a pompajului se realizează inversia de populație. Această valoare reprezintă densitatea de energie de pompaj necesară atingerii pragului inversiei de populație. Din condiția:  $n_1 = n_2$  se obține valoarea densității de prag:

$$(4.6) \quad \rho_{\text{prag inv.}} = \frac{1}{B_{31} \left( 1 - \frac{\tau_{32}}{\tau_{21}} \right) \frac{\tau_3}{\tau_{32}} \tau_{21}} = \frac{1}{B_{31} (1 - \beta) \eta \tau_{21}}$$

Existența pragului de inversie este determinată de faptul că starea inferioară a tranziției laser, la echilibru termodinamic, este puternic populată (se poate considera că

inițial popularea nivelului  $E_1$  este egală cu  $n_v$ ), iar inversia de populație începe să se realizeze din momentul în care jumătate din numărul de sisteme atomice se află pe nivelul  $E_2$ .

Din relația (4.6), ca și din cele anterioare, rezultă că pentru a realiza acumulare de sisteme atomice pe starea  $E_2$  este necesară o valoare  $\tau_{32}$  foarte mică (tranziția  $E_3 \Rightarrow E_2$  rapidă, deci relaxare prin tranziții neradiative), o valoare  $\tau_{21}$  foarte mare (nivelul  $E_2$  metastabil) și un coeficient  $B_{13}$  foarte mare (tranziția optică  $E_1 \Rightarrow E_3$  aproape interzisă). De asemenea pentru a asigura eficiența pompajului este necesar ca toate sistemele atomice să treacă de pe nivelul  $E_3$  pe  $E_2$ , deci timpul de relaxare corespunzător tranziției  $E_3 \Rightarrow E_1$  ( $\tau_{31}$ ) trebuie să fie mare.

În condițiile impuse, densitatea inversiei de populație este dată de relația:

$$\Delta n = n_2 - n_1 =$$

$$(4.7) \quad = \frac{\left( 1 - \frac{\tau_{32}}{\tau_{21}} \right) \rho_p B_{31} \tau_{21} \frac{\tau_3}{\tau_{32}} - 1}{\left( 1 + 2 \frac{\tau_{32}}{\tau_{21}} \right) \rho_p B_{31} \tau_{21} \eta \frac{\tau_3}{\tau_{32}} + 1} = \frac{(1 - \beta) \rho_p B_{31} \tau_{21} \eta - 1}{(1 + 2\beta) \rho_p B_{31} \tau_{21} \eta + 1},$$

unde:  $\beta = \frac{\tau_{32}}{\tau_{21}}$ , iar:  $\mu = \frac{\tau_3}{\tau_{32}}$  - factorul de eficiență al pompajului - reprezintă

fracția de sisteme atomice excitate prin pompaj pe nivelul  $E_3$  care trec pe  $E_2$ , devenind astfel utile pentru realizarea inversiei de populație. Pentru un material ideal este necesar ca:  $\beta \rightarrow 0$  și  $\eta \rightarrow 1$ , adică mărimea  $\tau_{32}$  să fie foarte mic (deci  $\tau_3 \approx \tau_{32}$ ) și  $\tau_{21}$  foarte mare.

Pentru a menține valoarea staționară a inversiei de populație în cazul materialelor ideale cu trei niveluri energetice este necesar ca puterea sursei de pompaj să fie cel puțin egală cu:

$$(4.8) \quad P_{\text{pompaj}} = \frac{n h \nu_{13}}{2 \tau_{21}}$$

Din această putere o parte se regăsește sub formă de radiație, restul fiind disipat în material prin diferite mecanisme:

$$(4.9) \quad P_{\text{disipat}} = \frac{n h \nu_{32}}{2 \tau_{21}}$$

Această putere trebuie îndepărtată în mod eficient din material deoarece poate să-l distrugă, de ex. prin efecte termice.



Un exemplu de material laser activ al cărui sistem de niveluri energetice poate fi redus la schema cu trei niveluri este reprezentat de către ansamblul de ioni de crom ( $\text{Cr}^{3+}$ ) care dopează rețeaua cristalină a safirului:  $\text{Al}_2\text{O}_3 : \text{Cr}^{3+}$ .

#### 4.3 Schema cu patru niveluri energetice.

În această schemă canalul prin care se realizează pompajul este complet diferit de cel prin care se realizează generarea radiației, ceea ce permite obținerea inversiei de populație chiar la puteri mici ale sursei de pompaj. În fig. 64 a sunt reprezentate cele patru niveluri energetice implicate în proces. Pompajul se realizează pe canalul  $E_1 \Rightarrow E_2$ , iar inversia se obține între stările  $E_3 \Rightarrow E_2$ . Ca și în cazul precedent, pentru simplificare, vom presupune că nivelurile energetice sunt nedegenerate.

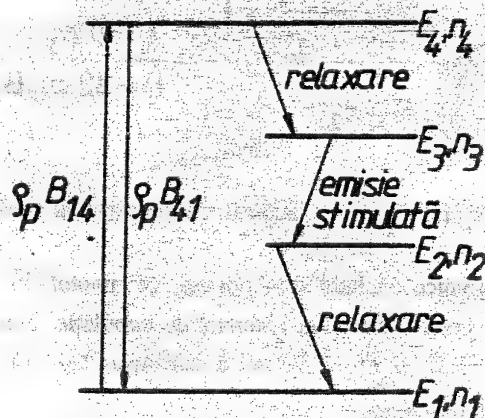


Fig. 64 a

Variația în timp a densității de populație a nivelurilor energetice este dată de relațiile:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad \frac{dn_4}{dt} &= (\rho_p B_{14} n_1 - \rho_p B_{41} n_4) - \frac{n_4}{\tau_{43}} - \frac{n_4}{\tau_{42}} - \frac{n_4}{\tau_{41}} = \\ &= \rho_p B_{14} (n_1 - n_4) - \frac{n_4}{\tau_4} \end{aligned}$$

$$(4.10) \quad \text{b)} \quad \frac{dn_3}{dt} = (\rho B_{23} n_2 - \rho B_{32} n_3) + \frac{n_4}{\tau_{43}} - \frac{n_3}{\tau_{32}} - \frac{n_3}{\tau_{31}}$$

$$\text{c)} \quad \frac{dn_2}{dt} = (\rho B_{32} n_3 - \rho B_{23} n_2) + \frac{n_4}{\tau_{42}} + \frac{n_3}{\tau_{32}} - \frac{n_2}{\tau_{21}}$$

Între densitățile de populație există relația:

$$(4.10) \quad \text{d)} \quad n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = n_v,$$

de unde rezultă: 
$$\frac{dn_1}{dt} = (\rho_p B_{41} n_4 - \rho_p B_{14} n_1) + \frac{n_4}{\tau_{41}} + \frac{n_3}{\tau_{31}} + \frac{n_2}{\tau_{21}}.$$

Vom considera cazul când materialul activ nu este introdus într-un rezonator optic, deci densitatea de radiație  $\rho(v_{32})$  are o valoare foarte mică astfel încât procesele forțate între nivelurile  $E_3 \Rightarrow E_2$  pot fi neglijate. Pentru a obține o inversie de populație eficientă este necesar ca nivelurile energetice să se relaxeze numai pe anumite canale. Populația nivelului  $E_4$  trebuie să se relaxeze cât mai rapid spre  $E_3$ , deci este necesar ca timpul  $\tau_{43}$  să fie cât mai mic, iar timpurile  $\tau_{42}$  și  $\tau_{41}$  cât mai mari (tranziții interzise). Populația nivelului  $E_3$  trebuie să se relaxeze numai spre  $E_2$ , deci timpul  $\tau_{31}$  cât mai mare, populația nivelului  $E_2$  să se relaxeze spre  $E_1$  cât mai rapid, deci  $\tau_{21}$  cât mai mic. Pentru a obține inversie de populație cât mai mare este necesar ca nivelul  $E_3$  să fie populat, iar  $E_2$  foarte puțin populat. În acest scop tranziția  $E_4 \Rightarrow E_2$  trebuie să fie interzisă ( $\tau_{42}$  cât mai mare), iar timpul de viață al nivelului  $E_2$  cât mai mic. În aceste condiții ecuațiile cinetice în regim staționar devin:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad \frac{dn_4}{dt} &= \rho_p B_{41} (n_1 - n_4) - \frac{n_4}{\tau_{43}} = 0 \\ \text{b)} \quad \frac{dn_3}{dt} &= \frac{n_4}{\tau_{43}} - \frac{n_3}{\tau_{32}} = 0 \\ \text{c)} \quad \frac{dn_2}{dt} &= \frac{n_3}{\tau_{32}} - \frac{n_2}{\tau_{21}} = 0 \\ \text{d)} \quad n_1 + n_2 + n_3 + n_4 &= n_v \end{aligned}$$

care conduc la densitățile de populație:  
(4.12)

$$a) \quad n_4 = \frac{\tau_{43} n_v}{\tau_{21} + \tau_{32} + 2\tau_{43} + \frac{1}{\rho_p B_{41}}} \rightarrow \frac{\tau_{43} n_v}{\tau_{21} + \tau_{32} + 2\tau_{43}}$$

$$b) \quad n_3 = \frac{\tau_{32} n_v}{\tau_{21} + \tau_{32} + 2\tau_{43} + \frac{1}{\rho_p B_{41}}} \rightarrow \frac{\tau_{32} n_v}{\tau_{21} + \tau_{32} + 2\tau_{43}}$$

$$c) \quad n_2 = \frac{\tau_{21} n_v}{\tau_{21} + \tau_{32} + 2\tau_{43} + \frac{1}{\rho_p B_{41}}} \rightarrow \frac{\tau_{21} n_v}{\tau_{21} + \tau_{32} + 2\tau_{43}}$$

$$d) \quad n_1 = \frac{\left( \tau_{43} + \frac{1}{\rho_p B_{41}} \right) n_v}{\tau_{21} + \tau_{32} + 2\tau_{43} + \frac{1}{\rho_p B_{41}}} \rightarrow \frac{\tau_{43} n_v}{\tau_{21} + \tau_{32} + 2\tau_{43}}$$

În fig. 64 b este prezentată grafic dependența densităților de populație de densitatea energiei de pompaj  $\rho_p$ , pentru cazul  $\tau_{32} > \tau_{21}$  și  $\tau_{43} > \tau_{21}$ .

Densitatea inversiei de populație este dată de relația:

$$(4.13) \quad \Delta n_{32} = n_3 - n_2 = \frac{(\tau_{32} - \tau_{21}) n_v}{\tau_{21} + \tau_{32} + 2\tau_{43} + \frac{1}{\rho_p B_{41}}}$$

Se obține inversie de populație chiar la densități mici ale energiei sursei de pompaj, iar mărimea densității inversiei de populație depinde de timpurile de viață  $\tau_{32}$  și  $\tau_{21}$ .

În condiții ideale, pentru a menține inversia populației la valoarea ei staționară, în cazul materialelor cu patru niveluri energetice este necesar ca puterea sursei de pompaj să fie cel puțin egală cu:

$$(4.14) \quad P_{\text{pompaj}} = \frac{(n_3 - n_2) h \nu_{14}}{\tau_{32}}$$

O parte din această putere se regăsește sub formă de radiație, iar restul este disipat în material prin diferite mecanisme:

$$(4.15) \quad P_{\text{disipat}} = \frac{(n_3 - n_2) (h \nu_{43} + h \nu_{21})}{\tau_{32}}$$

Din categoria materialelor laser active care pot fi reprezentate printr-o schemă cu patru niveluri energetice fac parte de ex. ansamblul format din ioni de neodim ( $\text{Nd}^{2+}$ ) care dopează o sticlă sau ansamblul atomilor de neon în cazul laserului He-Ne.

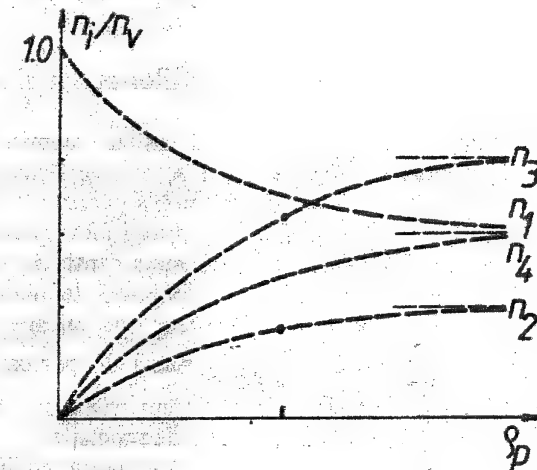


Fig. 64 b

Atât în cazul materialelor cu trei niveluri energetice cât și în cel al materialelor cu patru niveluri se pot face unele observații generale:

- Pentru a exclude popularea nivelurilor energetice în cazul echilibrului termodinamic este necesar ca distanța energetică a nivelurilor  $E_4$ ,  $E_3$  și în special  $E_2$ , față de  $E_1$ , să fie mult mai mare decât mărimea  $kT$ . În același timp intervalele energetice  $E_4 - E_3$  și  $E_2 - E_1$  să nu fie prea mari, deoarece s-ar disipa o cantitate prea mare din energia de pompaj pe canale neeficiente.

- În ambele cazuri timpurile de relaxare  $\tau_{32}$ , respectiv  $\tau_{43}$ , trebuie să fie mici, ceea ce face ca starea energetică de pompaj  $E_3$  (respectiv  $E_4$ ) să prezinte lățime spectrală mare. Acest fapt are influență pozitivă asupra randamentului de pompaj. În cazul pompajului optic acesta se realizează cu surse optice a căror domeniu spectral este larg față de domeniul de absorbție al tranziției, deci randamentul de utilizare va depinde de lățimea energetică a acestor niveluri. Același lucru este valabil și în cazul descărcărilor în gaze în care se realizează o distribuție continuă după viteze a densității de electroni.

- Pentru a exclude autoabsorbția pe tranzițiile  $E_4 \Rightarrow E_3$  și  $E_2 \Rightarrow E_1$  este de dorit ca procesele de relaxare între aceste stări să se realizeze prin tranziții neoptice.

- Pentru a folosi în mod util sistemele atomice ce populează nivelul superior al tranziției laser, este necesar ca timpul de viață al acestuia să fie determinat numai de procese radiative, probabilitatea proceselor neradiative de pe aceste niveluri să fie cât mai mică.

## 5. Interacțiunea dintre câmpului radiațiilor optice și mediul activ.

În prg. 4 s-a stabilit că într-un ansamblu de sisteme atomice identice supus acțiunii unei radiații de pompaj a cărei frecvență se află în domeniul spectral al frecvenței tranziției între nivelul fundamental și unul superior convenabil, are loc modificarea densității populării cu sisteme atomice a nivelurilor dispuse între cele două niveluri menționate. La un moment dat, noua distribuție a densității populației devine staționară, dar diferită de cea corespunzătoare echilibrului termodinamic; ea este determinată de caracteristicile cuantice ale nivelurilor, iar valoarea ei depinde de mărimea densității spectrale de energie ( $\rho_p$ ) a sursei de pompaj. Pentru valori convenabile ale caracteristicilor cuantice a două niveluri energetice, între populațiile acestora se poate realiza o stare cu inversie a densității de populație.

Considerând această situație este important să urmărim modificarea densității inversiei de populație a celor două niveluri sub acțiunea unui câmp *em* extern a cărui frecvență se află în domeniul de frecvență al tranziției. Variația temporală a acestei densități va fi descrisă de ecuațiile cinetice ale populării celor două niveluri în prezența câmpului *em*. Acesta va modifica densitatea inversiei de populație prin intermediul fenomenelor forțate posibile între cele două niveluri.

Ecuațiile cinetice conțin informații relativ la variația temporală a densității de populație care determină mărimea răspunsului ansamblului de sisteme atomice la acțiunea câmpului *em*, dar nu conțin informații relativ la modificarea fazei câmpului *em* determinată de această interacțiune.

Să analizăm ecuațiile cinetice pentru un ansamblu de sisteme atomice caracterizate numai prin două niveluri energetice supus acțiunii unui câmp de radiație optică. Analiza se va efectua considerând modelul de dipol electric oscilant atașat tranziției. Energia internă a unui dipol oscilant reprezintă suma energiei cinetice și potențiale, iar densitatea de energie a ansamblului de dipoli reprezintă produsul dintre densitatea dipolilor și energia internă a unui dipol la momentul considerat. Prin urmare:

$$(5.1) \quad U(t) = \frac{1}{2} n_v m_e \left[ \left( \frac{dx(t)}{dt} \right)^2 + \omega_0^2 x(t)^2 \right] = n_v U'(t),$$

unde  $x(t)$  reprezintă elongația mișcării mediate pe toți dipolii la momentul considerat. Variația în timp a densității energiei interne a ansamblului este:

$$(5.2) \quad \frac{dU(t)}{dt} = n_v m_e \left( \frac{dx(t)}{dt} \right) \left[ \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + \omega_0^2 x(t) \right].$$

Considerând ecuația mișcării oscilatorii forțate a dipolului electric:

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} + \gamma_0 \frac{dx(t)}{dt} + \omega_0^2 x(t) = -\frac{e}{m_e} e_x(t),$$

relația (5.2) devine:

$$(5.3) \quad \frac{dU(t)}{dt} = -n_v e e_x \frac{dx(t)}{dt} - n_v m_e \gamma_0 \left( \frac{dx(t)}{dt} \right)^2.$$

Pentru un sistem oscilant energiile cinetice și potențiale mediate în timp sunt egale:

$$\left\langle \frac{1}{2} m_e \left( \frac{dx(t)}{dt} \right)^2 \right\rangle = \left\langle \frac{1}{2} m_e \omega_0^2 x(t)^2 \right\rangle = \frac{U'}{2},$$

prin urmare termenul mediat în timp din relația (5.3):

$$\left\langle n_v \gamma_0 m_e \left( \frac{dx(t)}{dt} \right)^2 \right\rangle = n_v \gamma_0 U' = \gamma_0 U,$$

reprezintă energia pierdută de către ansamblul de dipoli prin amortizare radiativă și regăsită sub formă de energie radiată în mod spontan.

Termenul:  $\left\langle n_v e e_x(t) \frac{dx(t)}{dt} \right\rangle$ , care descrie schimbul de energie mediat în

timp dintre ansamblul de dipoli electrici oscilanți și câmpul *em* armonic aplicat este (vezi I 4.15):

$$(5.4) \quad \begin{aligned} & \left\langle n_v e e_x(t) \frac{dx(t)}{dt} \right\rangle = \\ &= \frac{n_v e}{4} \left\langle \left[ \tilde{E}_x(\omega) e^{i\omega t} + \tilde{E}_x^*(\omega) e^{-i\omega t} \right] \left[ i\omega \tilde{X}(\omega) e^{i\omega t} - i\omega \tilde{X}^*(\omega) e^{-i\omega t} \right] \right\rangle = \\ &= \frac{n_v e \omega}{4} \left\langle \frac{\tilde{E}_x(\omega) \tilde{X}(\omega) e^{i2\omega t} - \tilde{E}_x^*(\omega) \tilde{X}^*(\omega) e^{-i2\omega t}}{2i} \right\rangle - \\ & \quad - i \frac{n_v e \omega}{4} \left\langle \tilde{E}_x^*(\omega) \tilde{X}(\omega) - \tilde{E}_x(\omega) \tilde{X}^*(\omega) \right\rangle = \end{aligned}$$

$$-i \frac{n_v e \omega}{4} \left[ \frac{e}{m_e \gamma_0 \omega} \frac{1}{1 + \frac{2i(\omega - \omega_0)}{\gamma_0}} + i \frac{e}{m_e \gamma_0 \omega} \frac{1}{1 - \frac{2i(\omega - \omega_0)}{\gamma_0}} \right] |\tilde{E}_x(\omega)|^2 =$$

$$= \frac{n_v e^2}{2 m_e \gamma_0} \frac{1}{1 + \left[ \frac{(\omega - \omega_0)}{\gamma_0/2} \right]^2} |\tilde{E}_x(\omega)|^2$$

Primul termen din relația (5.4) reprezintă o componentă armonică la frecvența  $2\omega$  a cărei mediere în timp este egală cu zero. Transferul de energie descris de acest termen pendulează între câmpul *em* excitator și sistemele de dipoli cu care interacționează, prin urmare între cele două părți nu există transfer mediu de energie. Al doilea termen descrie variația energiei interne a ansamblului determinată de interacțiunea dintre câmp și dipol.

Evoluția în timp a energiei interne a ansamblului de dipoli ca rezultat al acestei interacțiuni este descrisă de relația:

$$(5.5) \quad \frac{dU(t)}{dt} = \frac{n_v e^2}{2 m_e \Delta\omega_0} \frac{1}{1 + \left( \frac{\omega - \omega_0}{\Delta\omega_0/2} \right)^2} |\tilde{E}_x(\omega)|^2 - \gamma_0 U(t).$$

Folosind relația (5.5), se poate obține ecuația cinetică dacă se trece de la ansamblul de dipoli electrici oscilanți la ansamblul de sisteme atomice cu două stări energetice cărora le-a fost atașat dipolul. În acest scop, ca și în prg. 1.2, se fac următoarele considerații:

- Deoarece s-a presupus că sistemul atomic are numai două niveluri energetice, se poate considera un nivel energetic de referință, dispus între cele două niveluri, astfel

încât:  $E_1 = -\frac{\hbar\omega_{12}}{2}$  și  $E_2 = +\frac{\hbar\omega_{12}}{2}$ . Sistemele atomice fiind distribuite numai

pe aceste niveluri, mărimea energiei interne a ansamblului va fi:

$$(5.6) \quad U(t) = n_1(t)E_1 + n_2(t)E_2 =$$

$$= [n_2(t) - n_1(t)] \frac{\hbar\omega_{12}}{2} = -\Delta n_{12}(t) \frac{\hbar\omega_{12}}{2},$$

unde:  $n_1(t) + n_2(t) = n_v$ .

- În timp ce răspunsul ansamblului de dipoli este proporțional cu densitatea acestora, răspunsul ansamblului de sisteme atomice este proporțional cu:

$$n_1(t) - n_2(t) = \Delta n_{12}(t).$$

- Energia internă a ansamblului de dipoli se amortizează până la  $U(t) = 0$ , în timp ce energia internă a ansamblului de sisteme atomice aflat în echilibru termodinamic față de mediul înconjurător, se amortizează până la valoarea de echilibru termodinamic  $U_0$ , dată de relația:

$$(5.7) \quad U_0 = [n_{02} - n_{01}(t)] \frac{\hbar\omega_{12}}{2} = -\Delta n_0 \frac{\hbar\omega_{12}}{2},$$

unde  $n_{01}$  și  $n_{02}$  reprezintă popularea cu sisteme atomice a celor două niveluri la echilibru termodinamic, determinată conform distribuției Boltzman. Termenul care descrie variația energiei interne ( $\gamma_0 U$ ) determinată de amortizare (emisia spontană) urmează să fie înlocuit prin:  $\gamma_0 (U - U_0)$ .

Pe baza acestor considerații relația (5.5) devine:

$$(5.8) \quad \frac{d[\Delta n_{12}(t)]}{dt} = -2W_{12} \Delta n_{12}(t) - \frac{\Delta n_{12}(t) - \Delta n_0}{T_1},$$

unde:

$$(5.9) \quad W_{12}(\omega) = \frac{\pi e^2}{4 m_e \hbar \omega_{12}} \frac{2}{\pi \Delta\omega_{12}} \frac{1}{1 + \left[ \frac{\omega - \omega_{12}}{\Delta\omega_{12}/2} \right]^2} |\tilde{E}_x(\omega)|^2.$$

Conform relației (I 6.3) se poate scrie:  $|\tilde{E}_x(\omega)|^2 = \rho(\omega)/\epsilon_0$  - unde:  $\rho(\omega)$  reprezintă densitatea spectrală de energie, iar relația (5.9) devine:

$$(5.10) \quad W_{12}(\omega) = \frac{\pi e^2}{4 m_e \hbar \omega_{12} \epsilon_0} g(\omega, \omega_{12}) \rho(\omega) = B_{12} g(\omega, \omega_{12}) \rho(\omega),$$

relație ce descrie dependența de frecvență a coeficientului Einstein pentru fenomene forțate, în cazul unei tranziții de tip Lorentz.

### 5.1 Ecuațiile cinetice pentru un ansamblu de sisteme atomice cu două niveluri energetice supus acțiunii unui câmp *em* armonic

Considerăm un ansamblu format din sisteme atomice cu două niveluri energetice ( $E_1$  și  $E_2$ ), caracterizate prin factorii de degenerare  $g_1$ , respectiv  $g_2$ . Ansamblul interacționează cu un semnal *em* armonic a cărui frecvență este cuplată cu frecvența tranziției. Sistemele atomice vor efectua tranziția  $1 \Rightarrow 2$  cu rata totală  $(W_{12} + w_{12})n_1(t)$ , respectiv  $2 \Rightarrow 1$  cu rata totală  $(W_{21} + w_{21})n_2(t)$  (fig. 30). Între ratele tranzițiilor forțate există relația (IV 3.4), iar raportul ratelor de relaxare este dat de relația (2.8).



Sistemele atomice sunt repartizate pe cele două niveluri degenerate:

$$n_1(t) + n_2(t) = n_v,$$

iar diferența densității de populație va fi:

$$\Delta n(t) = \frac{g_2}{g_1} n_1(t) - n_2(t),$$

expresie ce va determina valoarea susceptibilității complexe, respectiv cea a câștigului.

În condițiile echilibrului termodinamic, raportul populațiilor este descris de factorul Boltzmann, iar diferența de populație, pe baza relației (2.8), este dată de:

$$(5.11) \quad \Delta n_0 = \frac{g_2}{g_1} n_{01} - n_{02} = n_v \frac{1 - \exp\left(-\frac{\hbar\omega_{12}}{kT}\right)}{1 + \frac{g_1}{g_2} \exp\left(-\frac{\hbar\omega_{12}}{kT}\right)},$$

care, în cazul nivelurilor nedegenerate, devine:

$$(5.11') \quad \Delta n_0 = \frac{w_{21} - w_{12}}{w_{21} + w_{12}} n_v = n_v \operatorname{th}\left(\frac{\hbar\omega_{12}}{2kT}\right).$$

Pentru a simplifica calculele considerăm nivelurile nedegenerate ( $g_1 = g_2 = 1$ ).

Evoluția în timp a densității populației celor două niveluri, dată de relații de tipul (3.1):

$$\frac{dn_1(t)}{dt} = -[W_{12} + w_{12}]n_1(t) + [W_{21} + w_{21}]n_2(t),$$

$$\frac{dn_2(t)}{dt} = -[W_{21} + w_{21}]n_2(t) + [W_{12} + w_{12}]n_1(t),$$

poate fi scrisă sub forma evoluției diferenței de populație:

$$(5.12) \quad \frac{d[\Delta n(t)]}{dt} = -2W_{12}\Delta n(t) - \left[\Delta n(t) - \frac{w_{21} - w_{12}}{w_{21} + w_{12}} n_v\right],$$

unde s-a considerat  $W_{12} = W_{21}$  (niveluri nedegenerate). Dacă se notează:

$$W_{12} + w_{12} = \frac{1}{T_1} \text{ și se folosește relația (5.11') atunci (5.12) (ansamblul de sisteme}$$

atomice în echilibru termic cu RCN, deci:  $T_a = T_r$ ) devine:

$$\frac{d[\Delta n(t)]}{dt} = -2W_{12}\Delta n(t) - \frac{\Delta n(t) - \Delta n_0}{T_1},$$

adică se ajunge la forma (5.8), obținută pe baza principiului corespondenței cu aspectele

clasice. Termenul  $\frac{\Delta n(t) - \Delta n_0}{T_1}$  descrie relaxarea diferenței de populație  $\Delta n(t)$ ,

cu constanta de relaxare  $T_1$ , spre diferența de populație caracteristică echilibrului termodinamic. În cazul tranzițiilor optice ( $\hbar\omega_{12} \gg kT$ ) se obține:

$$W_{12} + w_{21} = \frac{1}{T_1} \cong \gamma_{21} = \frac{1}{\tau_{21}},$$

unde  $\tau_{21}$  - timpul de viață al stării superioare.

Termenul  $-2W_{12}\Delta n(t)$  descrie faptul că fenomenele forțate acționează asupra diferenței de populație  $\Delta n(t)$  astfel încât valoarea acesteia tinde la zero. Fenomenul este cunoscut sub denumirea de *saturarea diferenței de populație*, iar mărimea fenomenului este proporțională cu intensitatea componentei electrice a câmpului *em* aplicat (în cazul fenomenelor forțate, variația diferenței de populație trebuie multiplicată cu factorul 2 deoarece prin emisie stimulată dispare un sistem atomic de pe nivelul superior, respectiv prin absorbție un sistem atomic de pe nivelul inferior).

Dacă presupunem că, în prezența câmpului extern, s-a atins starea staționară a diferenței de populație, se poate scrie:

$$\frac{d[\Delta n(t)]}{dt} = -2W_{12}\Delta n(t) - \frac{\Delta n(t) - \Delta n_0}{T_1} = 0,$$

de unde rezultă expresia:

$$(5.13) \quad \Delta n(t) = \Delta n_{ss} = \frac{\Delta n_0}{1 + 2W_{12}T_1},$$

reprezentată în fig. 65 b funcție de mărimea  $2W_{12}T_1$  (energia câmpului *em* extern).

## 5.2 Fenomenul de saturare a tranziției (a diferenței de populație)

### a) Sisteme atomice cu două niveluri energetice.

Pentru a analiza fenomenul de saturare a diferenței de populație dintre două niveluri energetice se consideră ecuația cinetică (5.8). Presupunem că printr-un mijloc oarecare între cele două niveluri energetice s-a creat diferența de populație inițială:

$$\Delta n_{12}(0) = n_1(0) - n_2(0),$$

a cărei valoare este diferită de populație la echilibru termodinamic.

Dacă ansamblul nu interacționează cu câmpul  $em$ , atunci  $W_{12} = 0$ , iar diferența de populație  $\Delta n_{12}(0)$  se relaxează spre valoarea  $\Delta n_0$  numai prin emisie spontană caracterizată prin constanta de relaxare  $T_1$ . Relația (5.8) devine:

$$\frac{d[\Delta n_{12}(t)]}{dt} = -\frac{\Delta n_{12}(t) - \Delta n_0}{T_1}, \text{ sau:}$$

$$\frac{d[\Delta n_{12}(t) - \Delta n_0]}{\Delta n_{12}(t) - \Delta n_0} = -\frac{1}{T_1} dt,$$

de unde:

$$(5.14) \quad \Delta n_{12}(t) = \Delta n_0 + [\Delta n_{12}(0) - \Delta n_0] e^{-t/T_1}$$

Diferența de populație inițială, după un interval de timp, se relaxează spre valoarea de echilibru termodinamic după o lege exponențială.

Dacă la momentul  $t = 0$  ansamblului considerat i se aplică un câmp  $em$ , atunci  $W_{12} \neq 0$ , iar variația în timp a diferenței de populație este dată de relația (5.8), care poate fi scrisă sub forma:

$$\frac{d[\Delta n_{12}(t)]}{dt} = -\Delta n_{12}(t) \frac{2W_{12}T_1 + 1}{T_1} + \frac{\Delta n_0}{2W_{12}T_1 + 1} \frac{2W_{12}T_1 + 1}{T_1} =$$

$$= -[\Delta n_{12}(t) - \Delta n_{12,sat}] \frac{2W_{12}T_1 + 1}{T_1}$$

$$\text{unde: } \Delta n_{12,sat} = \frac{\Delta n_0}{2W_{12}T_1 + 1}$$

Valoarea densității de populație, după un interval de timp  $t$ , este dată de relația:

$$(5.15) \quad \Delta n_{12}(t) = \Delta n_{12,sat} + [\Delta n_{12}(0) - \Delta n_{12,sat}] e^{-\left(2W_{12} + \frac{1}{T_1}\right)t}$$

Prin urmare sub acțiunea câmpului  $em$ , diferența de populație se relaxează spre diferența de populație staționară:  $\Delta n_{12,sat} < \Delta n_0$ , iar viteza de relaxare este caracterizată prin timpul de relaxare:

$$(5.16) \quad T = \frac{T_1}{2W_{12}T_1 + 1} < T_1.$$

Cu cât este mai intens câmpul  $em$  aplicat cu atât mai repede se tinde spre starea saturată corespunzătoare.

Dacă se notează:  $W_{sat} = \frac{1}{2T_1}$ , atunci relația (5.13) devine:

$$(5.17) \quad \frac{\Delta n_{ss}}{\Delta n_0} = \frac{1}{1 + \frac{W_{12}}{W_{sat}}} = \frac{1}{1 + ct \times \text{puterea semnalului}},$$

unde  $W_{sat}$  reprezintă probabilitatea tranzițiilor forțate pentru care diferența de populație devine egală cu jumătate din valoarea inițială (în prezența semnalului slab). Această expresie a diferenței de populație descrie saturarea omogenă a diferenței de populație în cazul tranzițiilor între cele două niveluri.

Reprezentarea grafică a variației temporale a diferenței de populație pentru diferite valori ale intensității câmpului  $em$  aplicat este dată în fig. 65 a. Pentru valori mari ale intensității câmpului  $em$  probabilitatea fenomenului de emisie stimulată devine

mare astfel încât:  $W_{12} \gg \frac{1}{T_1}$ , iar diferența densității de populație corespunzătoare regimului de saturație tinde la zero ( $\Delta n_{12,sat} \rightarrow 0$ ).

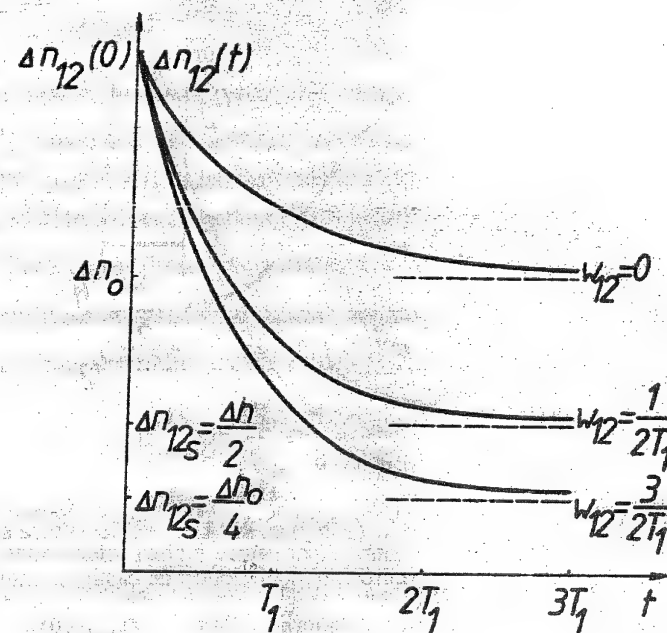


Fig. 65 a

Saturarea diferenței de populație a două niveluri energetice sub acțiunea unui câmp *em* extern este un fenomen foarte important în funcționarea dispozitivelor laser. Acesta determină saturarea coeficientului de atenuare ( $a_m$ ) la propagarea fascicului de radiație optică prin mediul material sau a coeficientului de câștig  $\alpha_m(\omega)$  al mediului activ la propagarea prin acesta a acelui fascicul.

Saturarea coeficientului de câștig poate fi descrisă de o relație asemănătoare cu (5.17), de forma:

$$(5.18) \quad \alpha_m(\omega) = \alpha_{m0} \frac{1}{1 + I/I_{sat}} = \frac{1}{1 + c \times \text{puterea semnalului}}$$

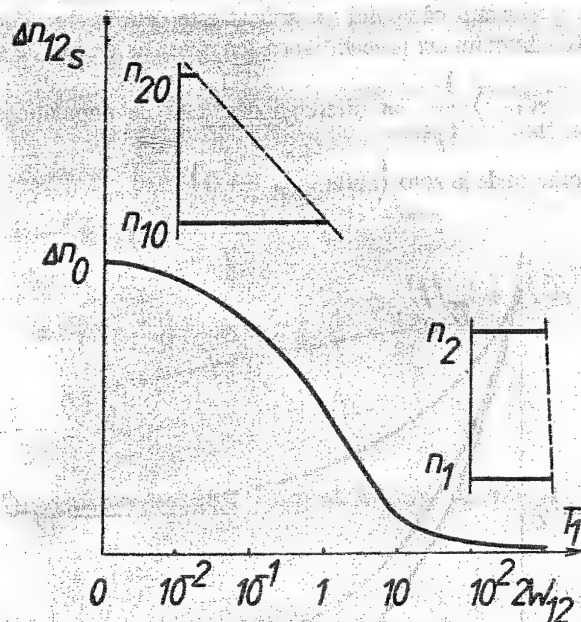


Fig. 65 b

unde  $\alpha_{m0}(\omega)$  reprezintă coeficientul de câștig nesaturat,  $I$  - intensitatea semnalului extern aplicat, iar  $I_{sat}$  - intensitatea pentru care coeficientul de câștig se saturează la o valoare egală cu jumătatea valorii lui  $\alpha_{m0}(\omega)$  (pentru  $I = I_{sat} \rightarrow \alpha_m(\omega) = \alpha_{m0}(\omega)/2$ ).

În tehnica laserilor uneori se utilizează materiale alese astfel încât să se comporte asemănător cu un absorbant saturabil (de ex. în cazul modulării factorului de calitate (factorul-Q) al cavității rezonante, blocarea modurilor de oscilație sau izolarea optică pentru a preîntâmpina "scurgerea" semnalului obținut între două niveluri energetice). De asemenea saturarea diferenței inversiei de populație are loc în oscilatorul laser și determină puterea laser la ieșirea dispozitivului.

#### b) Sisteme atomice multinivel

În cazul unui ansamblu de sisteme atomice *multinivel* asupra căruia acționează un câmp *em* constituit din mai multe armonici la rezonanță cu unele tranziții ale sistemului atomic, densitatea de inversie de populație inițială, precum și densitatea de inversie la saturație va depinde de ratele de relaxare pe celelalte niveluri precum și de interacțiunile suplimentare.

Relația (3.3), care descrie legătura dintre densitatea de populație a diferitelor niveluri în regim staționar, poate fi scrisă sub forma:

$$\frac{dn_m}{dt} = -W_{mn}n_m + W_{nm}n_n + f_m(n_i, W_{mi}, w_{mi}) = 0,$$

unde s-a evidențiat numai interacțiunea sistemului atomic cu câmpul *em* armonic ( $\omega_{mn}$ ), funcția  $f_m$  cuprinzând ceilalți termeni ai relației, sau sub forma:

$$(5.19) \quad \Delta n_m = \frac{g_n}{g_m} n_m - n_n = \frac{g_n}{g_m} \frac{f_m(n_i, W_{mi}, w_{mi})}{W_{mn}}$$

Deoarece pentru intensități mari ale câmpului extern perturbator ( $W_{mn} \rightarrow \infty$ ) funcția  $f_m$  tinde la o valoare finită, aceasta nedepinzând de valoarea energiei câmpului perturbator, pentru a fi satisfăcută relația (3.3), este necesar ca diferența de populație  $\Delta n_{mn}$  să îndeplinească condiția (5.19) pentru orice valoare a energiei câmpului.

Dacă se urmărește comportarea la saturație a populației  $n_{ss,k}$  a unui nivel  $E_k$ , interacțiunea externă fiind aplicată tranziției  $m \Leftrightarrow n$ , atunci valoarea populației  $n_{ss,k}$  se obține rezolvând setul de ecuații (3.3) și va fi de forma:

$$n_{ss,k} = \frac{a_{kmn} + b_{kmn} W_{mn}}{c_{mn} + d_{mn} W_{mn}} \rightarrow \frac{b_{kmn}}{d_{mn}},$$

unde coeficienții  $a_{kmn}$ ,  $b_{kmn}$ ,  $c_{kmn}$  și  $d_{kmn}$  conțin probabilitățile de relaxare și cele ale fenomenelor forțate pentru toate tranzițiile diferite de  $m \Leftrightarrow n$ . Pentru valori foarte mari ale energiei câmpului extern rezonant ( $\omega_{mn}$ ) populația de saturație ale fiecărui nivel  $k$  tinde la valoarea  $\frac{b_{kmn}}{d_{mn}}$ .

În cazul particular al tranziției  $m \Leftrightarrow n$  se poate scrie:



$$n_{ss,m} = \frac{a_{mmn} + b_{mmn}}{c_{mn} + d_{mn} W_{mn}}, \quad n_{ss,n} = \frac{a_{nmn} + b_{nmn}}{c_{mn} + d_{mn} W_{mn}},$$

de unde:

$$\begin{aligned} \Delta n_{ss,mn} &= \frac{g_n}{g_m} n_m - n_n = \\ &= \frac{1}{c_{mn}} \left( \frac{g_n}{g_m} a_{mmn} - a_{nmn} \right) + \frac{1}{c_{mn}} \left( \frac{g_n}{g_m} b_{mmn} W_{mn} - b_{nmn} W_{mn} \right) \\ &= \frac{1}{1 + \frac{d_{mn}}{c_{mn}} W_{mn}} \end{aligned}$$

care, pentru valori mari ale câmpului extern, tinde la:

$$\frac{1}{c_{mn}} \left( \frac{g_n}{g_m} a_{mmn} - a_{nmn} \right) = \frac{\Delta n_{0,mn}}{1 + \frac{d_{mn}}{c_{mn}} W_{mn}} = \frac{\Delta n_{0,mn}}{1 + \frac{W_{mn}}{W_{sat,mn}}},$$

asemănătoare cu relația (5.17), unde  $W_{mn,sat}$  reprezintă probabilitatea tranzițiilor forțate pentru care diferența de populație devine egală cu jumătatea diferenței populației în cazul semnalului slab, corespunzătoare condițiilor considerate. Prin urmare în cazul sistemului atomic *multinivel*, ca și în cazul sistemului atomic cu două niveluri energetice, saturarea diferenței de populație se realizează conform aceleiași legi.

#### c) Răspunsul tranzitoriu al sistemelor atomice multinivel

Răspunsul tranzitoriu al unui ansamblu de sisteme atomice cu două niveluri cu distribuție a populației diferită de cea la echilibru termodinamic, în lipsa câmpului *em* perturbator rezonant extern este descris de relația (5.14), iar în prezența acestuia de relația (5.15).

În cazul ansamblului de sisteme atomice *multinivel*, răspunsul este descris de soluția setului de  $(M-1)$  ecuații diferențiale liniare cuplate. Evoluția tranzitorie va fi descrisă fie de o soluție oscilatorie, fie de o amortizare exponențială. În cazul amortizării exponențiale vor apărea  $(M-1)$  constante de timp reprezentate de o combinație liniară a mărimilor  $W_{mi}$  și  $W_{mi}$ . Practic în majoritatea sistemelor *multinivel* vor exista câteva rate de amortizare dominante care vor descrie evoluția populației nivelelor energetice.

Dacă este îndeplinită condiția de "aproximație a frecvenței optice" ( $\hbar\omega/kT$ ), atunci se poate neglija probabilitatea de relaxare spre "în sus" ( $W_{mi}$ ), evoluția în timp a populației nivelului energetic *m* fiind descrisă de ecuația:

$$(5.20) \quad \frac{dn_m}{dt} = - \sum_{i < m} \gamma_{mi} n_m(t) + \sum_{i > m} \gamma_{im} n_i(t),$$

unde prima sumă, care reprezintă contribuția principală, descrie relaxarea populației nivelului *m* spre toate nivelurile inferioare, iar a doua sumă relaxarea populației nivelurilor superioare spre nivelul *m*. Dacă se consideră numai contribuția principală se obține:

$$(5.20') \quad \frac{dn_m}{dt} = - \sum_{i < m} \gamma_{mi} n_m(t) = - \gamma_m n_m(t)$$

$$\text{unde:} \quad \gamma_m = \frac{1}{\tau_m} = \frac{dn_m}{dt} = - \sum_{i < m} \gamma_{mi}.$$

conține atât amortizările radiative cât și pe cele neradiative.

Din (5.20') rezultă:

$$(5.21) \quad n_m(t) = n_m(t_0) \exp\left(-\frac{t-t_0}{\tau_m}\right),$$

relație prezentată în (IV 4.10).

## 6. Susceptibilitatea electrică a ansamblului de sisteme atomice.

Pe baza considerațiilor prezentate în prg. 5 relativ la trecerea de la ansamblul de dipoli electrici oscilanți atașați unei tranziții  $n \leftrightarrow m$  la ansamblul de sisteme atomice, se poate atașa tranziției date mărimea fizică - *susceptibilitate electrică* - a cărei valoare depinde de diferența populației celor două niveluri implicate în proces, expresia ei, conform relației (III 2.3), fiind de forma:

(6.1)

$$\begin{aligned} \tilde{\chi}_{nm}(\omega) &= \\ &= - \frac{(n_m - n_n) e^2 f_{mn}}{m_e \epsilon_0 \omega_{mn} \Delta \omega_{mn}} \left[ \frac{\frac{\omega - \omega_{mn}}{\Delta \omega_{mn}/2}}{1 + \left( \frac{\omega - \omega_{mn}}{\Delta \omega_{mn}/2} \right)^2} + i \frac{1}{1 + \left( \frac{\omega - \omega_{mn}}{\Delta \omega_{mn}/2} \right)^2} \right] \end{aligned}$$

(Deoarece expresia susceptibilității electrice a ansamblului de dipoli (III 3.1) conține

factorul  $\frac{e^2}{m_e}$ , expresia susceptibilității corespunzătoare ansamblului de sisteme



atomice capabile să participe la tranziție, trebuie să conțină factorul  $f_{mn}$  - tăria oscilatorului corespunzător tranziției).

Din punct de vedere cuantic valoarea susceptibilității electrice corespunzătoare tranziției  $n \leftrightarrow m$ , depinde de frecvența de bază și lățimea spectrală a tranziției, caracteristicile cuantice ale stării inițiale și finale ale tranziției ( $f_{mn}$ ), precum și de densitatea diferenței populației a celor două niveluri.

- Dacă ansamblul de sisteme atomice se află în echilibru termodinamic, atunci  $n_n > n_m$ , iar valoarea susceptibilității electrice ( $\chi_{mn}$ ) depinde numai de temperatură.

- Dacă se acționează în mod selectiv asupra ansamblului de sisteme atomice, atunci se modifică densitatea diferenței populației celor două niveluri și corespunzător valoarea susceptibilității electrice, aceasta putând chiar să-și modifice semnul.

- De asemenea dacă se realizează o densitate dată a diferenței populației și se acționează cu un câmp de radiație a cărui frecvență se află în domeniul spectral al tranziției, acesta, prin intermediul fenomenelor forțate de absorbție și emisie stimulată, modifică densitatea diferenței populației și corespunzător valoarea susceptibilității tranziției.

Valoarea susceptibilității, prin intermediul lățimii spectrale a tranziției, depinde de mecanismele de lățire a tranziției care acționează între componentele ansamblului.

Din relația (6.1) rezultă că atât mărimea  $\chi'(\omega)$  cât și  $\chi''(\omega)$  depind de diferența densităților populației celor două niveluri.

## 7. Tranziții spectrale lățite omogen și neomogen

Răspunsul ansamblului de sisteme atomice la acțiunea unui fascicul intens de radiație optică a cărui frecvență se află în domeniul spectral al tranziției și a cărui lățime spectrală este mult mai mică față de lățimea radiativă a tranziției depinde de mecanismele care determină lățirea tranziției. Din acest punct de vedere mecanismele de lărgire se divid în două clase: *mecanisme de lărgire omogenă* (respectiv *linie sau tranziție lătită omogen*) și *mecanisme de lărgire neomogenă* (*linie sau tranziție lătită neomogen*). Deosebirea dintre cele două tipuri de lărgire se manifestă în modul de participare a sistemelor atomice ale ansamblului la interacțiunea cu fasciculul considerat mai sus.

### 7.1 Tranziții spectrale lățite omogen

Un mecanism de lărgire este *omogen* dacă determină lărgirea aproximativ identică a tranziției fiecărui sistem atomic. Mecanismul de lărgire nu acționează asupra valorii frecvenței de bază a tranziției, iar mărimea lărgirii variază de la sistem la sistem conform legii căreia i se supune probabilitatea procesului, însă fără a se modifica funcția spectrală a tranziției. Prin urmare toate sistemele atomice ale ansamblului prezintă răspunsuri identice la acțiunea semnalului extern. Mărimea răspunsului individual depinde de mărimea diferenței dintre frecvența de rezonanță a sistemului atomic și frecvența semnalului aplicat. După cum s-a subliniat în prg. II 2 mărimea răspunsului

ansamblului în acest caz reprezintă mărimea răspunsului individual multiplicat cu densitatea diferenței populației celor două niveluri implicate în tranziție.

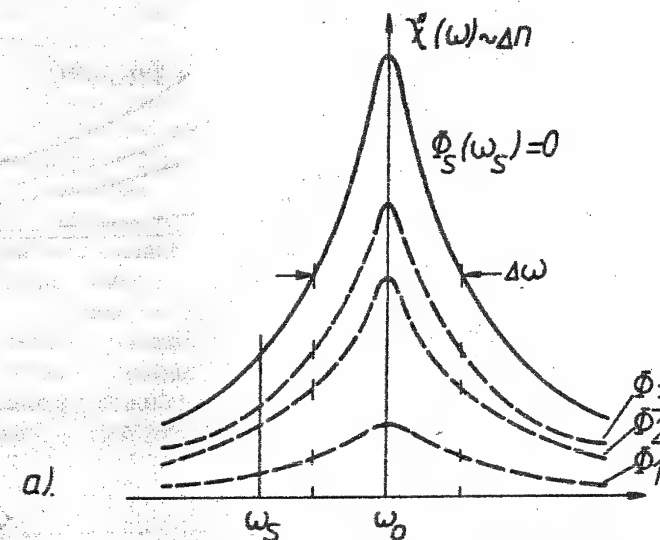


Fig. 66 a

Pentru a ilustra răspunsul ansamblului de sisteme atomice la acțiunea fasciculului considerat să ne imaginăm următoarea experiență. Valoarea componentelor susceptibilității  $\chi'(\omega)$  respectiv  $\chi''(\omega)$  poate fi măsurată funcție de frecvență folosind un fascicul de testare de intensitate mică și bandă spectrală îngustă a cărui frecvență poate fi variată de-a lungul domeniului spectral al tranziției. Să considerăm că asupra ansamblului de sisteme atomice acționează un fascicul de intensitate mare dar variabilă, caracterizat printr-un domeniu spectral foarte îngust. Frecvența acestui fascicul ( $\omega_s$ ) este cuprinsă în domeniul spectral al tranziției.

Deoarece tranziția este lătită omogen, acest fascicul interacționează în mod identic cu toate sistemele atomice ale ansamblului. Prin fenomenele forțate, funcție de intensitate, el tinde să satureze diferența densității populațiilor celor două niveluri, adică acționează asupra valorii  $\Delta n$ , pentru valori mari ale intensității făcând-o să tindă la zero, însă fără a modifica lățimea spectrală ( $\Delta\omega$ ) a tranziției. Odată cu modificarea mărimii  $\Delta n$  se modifică și valoarea mărimii  $\chi''(\omega)$ , respectiv  $\chi'(\omega)$ . În fig. 66 a este reprezentată valoarea mărimii  $\chi''(\omega)$  pentru diferite valori ale fluxului spectral ( $\Phi$ ), iar în fig. 66 b aceeași dependență în cazul mărimii  $\chi'(\omega)$ .

Dependența variației diferenței densității de populație de intensitatea semnalului extern intens este descrisă foarte bine de relația:

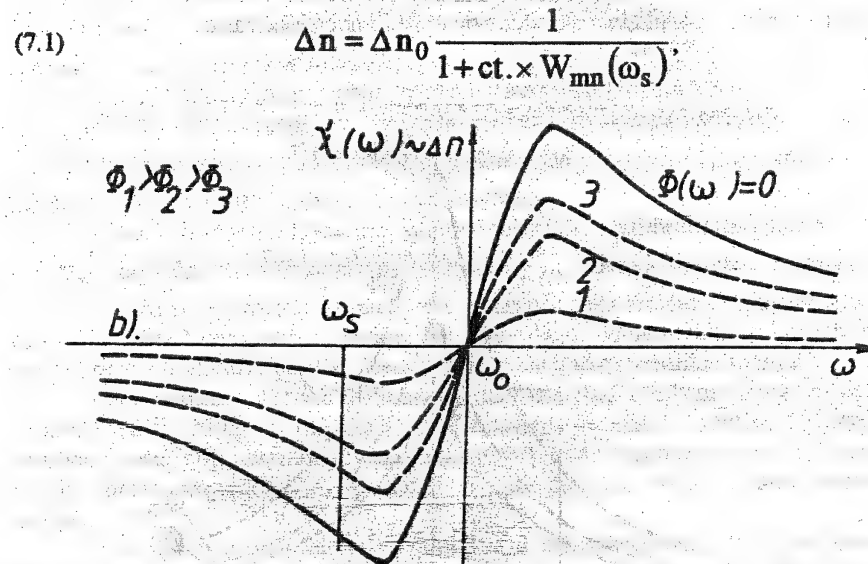


Fig. 66 b

unde  $\Delta n_0$  reprezintă densitatea diferenței de populație în lipsa semnalului extern, iar  $W_{mn}(\omega_s)$  - probabilitatea fenomenelor forțate, care depinde de forma conturului spectral al tranziției. În cazul tranzițiilor lățite omogen, conturul spectral al tranziției, în majoritatea cazurilor, este de tip Lorentz, deci:

(7.2)

$$W_s(\omega_s) \propto \frac{1}{1 + \left( \frac{\omega_s - \omega_0}{\Delta\omega/2} \right)^2}$$

Pentru o putere dată a semnalului de interacțiune, rata saturării tranziției depinde de cuplajul dintre frecvența semnalului și cea de rezonanță a sistemului atomic; rata procesului de interacțiune este maximă la rezonanță ( $\omega_0 = \omega_s$ ) și scade pe măsură ce crește diferența celor două frecvențe. Dacă semnalul de interacțiune este foarte intens, este posibilă saturarea tranziției chiar pentru un decuplaj mare al celor două frecvențe.

Pentru a caracteriza o tranziție lătită omogen este necesar să se cunoască conturul spectral al tranziției (lățimea spectrală a acestuia) și densitatea diferenței de populație a celor două niveluri ( $\Delta n$ ).

## 7.2 Tranziții spectrale lățite neomogen

Considerăm un ansamblu de sisteme atomice identice, deci fiecare sistem este caracterizat prin aceeași frecvență de rezonanță și același contur spectral al răspunsului la acțiunea unui semnal exterior a cărui frecvență se află în domeniul de rezonanță al tranziției. Lățimea spectrală a conturului este determinată de mecanismele omogene de lățire a tranziției care acționează asupra ansamblului.

Mecanismul de lărgire a tranziției spectrale este neomogen dacă acționează cu intensități diferite asupra frecvenței de rezonanță a diferitelor sisteme atomice ale ansamblului, deplasând-o cu valori diferite față de frecvența de rezonanță, funcție de valoarea intensității. Distribuția valorii intensității acțiunii funcție de valoarea parametrului caracteristic mecanismului este descrisă de o anumită lege. Ca rezultat al acestei acțiuni, frecvența de rezonanță a unui grup de sisteme atomice ale ansamblului este deplasată cu o anumită valoare. Odată cu frecvența de rezonanță este deplasat și conturul spectral omogen caracteristic tranziției considerate. Conform prg. III 3.1, conturul spectral emis de către ansamblul de sisteme atomice supus acțiunii unui asemenea mecanism, reprezintă înfășurătoarea conturilor spectrale deplasate emise de către grupurile de sisteme atomice supuse acțiunii mecanismului considerat. În acest caz frecvența centrală a conturului spectral înregistrat al tranziției corespunde grupului de sisteme atomice a cărui frecvență de rezonanță nu este supusă acțiunii mecanismului (fig. 68 a).

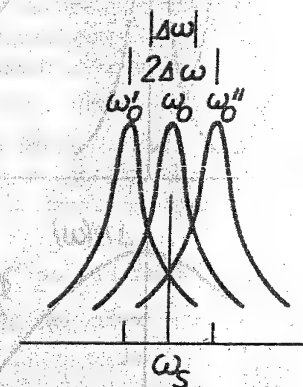


Fig. 67

Să analizăm răspunsul ansamblului considerat mai sus la acțiunea unui semnal optic extern de intensitate mare și lățime spectrală foarte mică, a cărui frecvență ( $\omega_s$ ) este cuprinsă în domeniul spectral al tranziției. Conturul spectral al răspunsului  $[\chi'(\omega), \chi''(\omega)]$  se înregistrează cu ajutorul unui fascicul de radiație optică de intensitate mică și lățime spectrală mică ( $\Delta\omega \ll \Delta\omega_{\text{neomo.}}$ ), dar a cărui frecvență

poate fi variată în mod continuu în domeniul spectral al interacțiunii. După cum s-a subliniat în prg. III 3.2, semnalul extern ( $\omega_s$ ) aplicat interacționează, prin intermediul fenomenelor forțate, numai cu sistemele atomice ale căror contururi spectrale omogene se suprapun peste frecvența acestuia. Pentru o intensitate dată a semnalului extern, cuplajul maxim se realizează pentru sistemele atomice a căror frecvență de rezonanță coincide cu frecvența semnalului. Cuplajul este mai mic cu cât frecvența de rezonanță este mai deplasată spre frecvențe mai mari sau mai mici față de frecvența semnalului extern. Convențional se consideră că participă la interacțiune, cu cuplaje diferite, toate sistemele atomice a căror frecvență de rezonanță se află într-un domeniu spectral egal cu două lățimi spectrale omogene, centrat pe frecvența semnalului (fig. 67). Acest subansamblu de sisteme atomice este cunoscut sub denumirea de *pachet spectral*. Noțiunea este asemănătoare cu cea de pachet de spin, introdusă în domeniul rezonanței magnetice, pentru a caracteriza interacțiunea magnetică a spinilor electronilor cu câmpul magnetic neomogen.

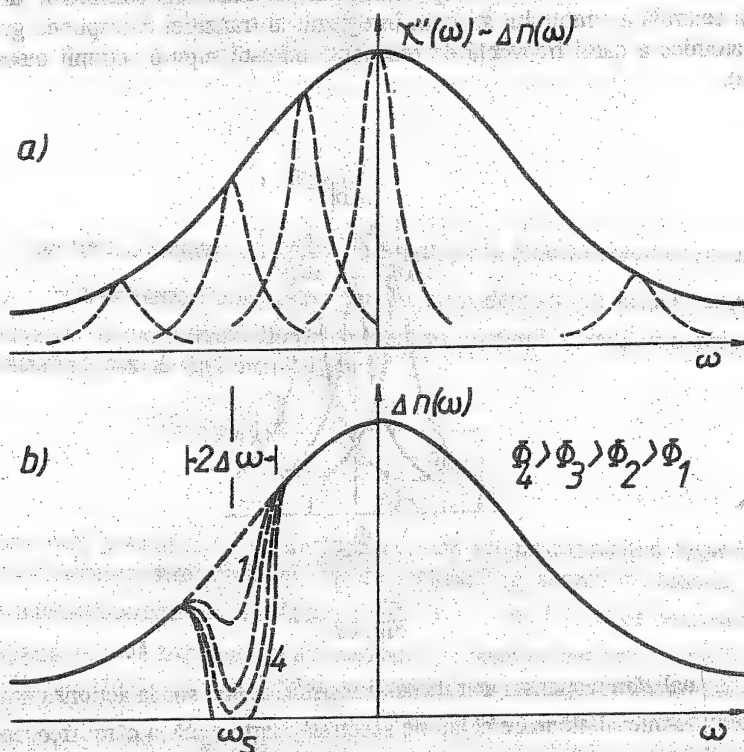


Fig. 68 a,b

Prin urmare câmpul extern aplicat, chiar la intensități foarte mari, poate interacționa numai cu sistemele atomice ce aparțin pachetului spectral centrat pe frecvența câmpului. Pentru a descrie interacțiunea câmpului extern cu ansamblul de sisteme atomice supus acțiunii unui mecanism neomogen de lățire a tranziției este necesar să se considere atât mecanismele omogene de lățire, cât și cele neomogene. Mecanismele omogene aproape totdeauna conduc la o formă de tip Lorentz a conturului, în timp ce cele neomogene, dacă deplasarea frecvenței este aleatoare fiind descrisă de o distribuție gaussiană, conduc la o formă de tip Gauss. Se poate aprecia numărul de pachete spectrale independente ale ansamblului divizând lățimea spectrală neomogenă la dublul lățimii spectrale omogene.

Să analizăm răspunsul  $\chi''(\omega)$  al ansamblului la acțiunea semnalului extern considerat. Presupunem că densitatea spectrală de flux a acestuia este constantă. Deoarece la interacțiune participă numai sistemele atomice ale pachetului spectral, se va micșora numai contribuția diferenței densității de populație corespunzătoare acestui pachet. Corespunzător valoarea înfășurătorii răspunsului  $\chi''(\omega)$  ale pachetelor spectrale ale ansamblului se va micșora numai în domeniul spectral al pachetului considerat (fig. 68 b). Saturarea maximă va corespunde sistemelor atomice a căror frecvență coincide cu frecvența semnalului, pentru celelalte ( $\omega_s \neq \omega_0$ ) saturarea va fi mai slabă (cuplajul câmp-sistem atomic este slab). În acest mod în profilul înfășurătorii  $\chi''(\omega)$  (profilul distribuției după frecvențe a densității diferenței de populație) se perforază o "gaură". Lățimea spectrală a acestei găuri (măsurată la jumătatea valorii ei maxime) este aprox. egală cu dublul lățimii omogene. Ea devine cu atât mai profundă cu cât intensitatea semnalului este mai mare. Pentru o valoare mare a intensității este posibil să se atingă valoare  $\chi''(\omega_s = \omega_0) = 0$ . La creșterea intensității semnalului peste această valoare "gaura" se lățește foarte încet, deoarece sistemele atomice adiacente se saturează din ce în ce mai greu. Acest fenomen de perforare a unei "găuri" în curba de distribuție a populației a fost evidențiat experimental.

Să analizăm rezultatul acțiunii câmpului extern ( $\omega_s$ ) asupra părții reactive a susceptibilității  $\chi'(\omega)$ . După cum reiese din prg. III 3.2, mărimea  $\chi'(\omega)$  reprezintă înfășurătoarea contribuțiilor tuturor pachetelor spectrale la această mărime. La frecvența centrală, valoarea mărimei  $\chi'(\omega)$  este egală cu zero deoarece contribuția sistemelor atomice a căror frecvență de rezonanță este centrată pe frecvența centrală este egală cu zero, iar contribuția, la această frecvență a sistemelor atomice a căror frecvență de rezonanță este dispusă simetric față de frecvența centrală sunt egale și de semn contrar. Pentru frecvențe depărtate de frecvența centrală, valoarea lui  $\chi'(\omega)$  este determinată de contribuția pachetelor spectrale centrate pe frecvența considerată. De asemenea trebuie reamintit faptul că domeniul spectral pe care valoarea mărimei  $\chi'(\omega)$  nu poate fi neglijată este aprox. egal cu 6 lățimi spectrale ale mărimei  $\chi''(\omega)$ .



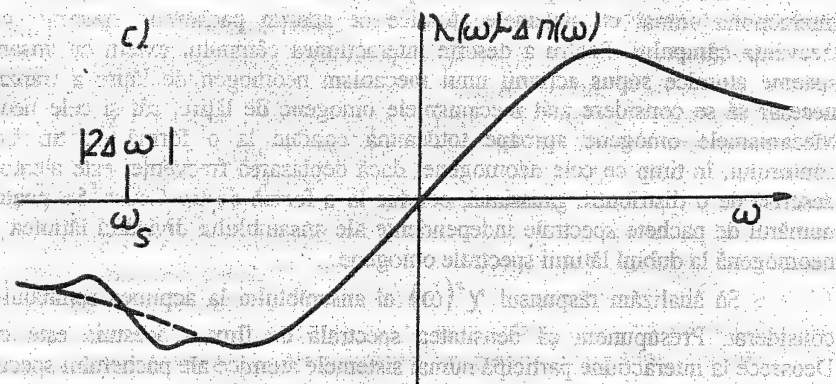


Fig. 68 c)

Dacă frecvența semnalului extern coincide cu frecvența centrală ( $\omega_s = \omega_0$ ), atunci se saturează pachetul spectral central, dar, conform celor prezentate mai sus, valoarea  $\chi'(\omega_s = \omega_0)$  nu se poate modifica. Dacă  $\omega_s > \omega_0$  sau  $\omega_s < \omega_0$ , saturarea pachetului spectral centrat pe frecvența considerată, modifică valoarea mărimii  $\chi'(\omega_s)$ . Saturarea pachetului spectral considerat, micșorează valoarea densității diferenței de populație a celor două niveluri ale tranziției, conform relației (7.1), prin urmare din valoarea corespunzătoare a înfășurătorii  $\chi'(\omega)$  trebuie extrasă contribuția numărului de sisteme atomice cu care s-a micșorat diferența de populație (fig. 68 c).

Pentru a caracteriza o tranziție lătită neomogen este necesar să se cunoască lățimea neomogenă a conturului spectral al tranziției, lățimea omogenă caracteristică sistemelor atomice ale ansamblului, numărul de pachete spectrale, precum și densitatea diferenței de populație  $\Delta n(\omega_s)$  corespunzătoare fiecărui pachet spectral.

Dacă lățimea tranziție neomogene este mult mai mare față de cea a tranziției omogene, atunci vor exista mai multe pachete spectrale și se vor putea perfora mai multe găuri care nu vor interacționa între ele. Acesta este de ex. cazul laserului cu He-Ne, unde predomină lărgirea determinată de efectul Doppler.

Dacă deplasarea frecvenței de rezonanță datorită mecanismelor neomogene este mică, atunci se păstrează caracterul de tranziție omogenă, iar un semnal aplicat la orice frecvență cuprinsă în domeniul spectral al conturului saturează toate sistemele atomice și nu se perforază nici o gaură. Acesta este de ex. cazul laserului în care atomii activi dopeză o matrice reprezentată de rețeaua cristalină a unui compus convenabil. Între aceste două cazuri extreme apar cazuri intermediare în care se manifestă 1-2 pachete spectrale. De ex. este cazul laserului cu  $\text{CO}_2$ .

Din cele prezentate rezultă că lărgirea spectrală a tranziției este determinată de acțiunea simultană a câtorva mecanisme. Conturul spectral rezultat va fi determinat de convoluția funcțiilor ce descriu conturile corespunzătoare mecanismelor implicate:

$$g(\omega) = g_1(\omega) \otimes g_2(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_1(\omega') g_2(\omega - \omega') d\omega'.$$

Dacă acționează două mecanisme de tip Lorentz caracterizate prin lățimile spectrale  $\Delta\omega_1$  și  $\Delta\omega_2$ , conturul spectral rezultat va fi tot de tip Lorentz:

$$g_{L_1}(\omega, \Delta\omega_1) \otimes g_{L_2}(\omega, \Delta\omega_2) = g_L(\omega, \Delta\omega_1 + \Delta\omega_2),$$

cu lățimea spectrală:

$$\Delta\omega_L = \Delta\omega_1 + \Delta\omega_2.$$

Aceasta este echivalent cu faptul că în cazul lărgirilor omogene, timpul de viață al nivelului este determinat de:

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} + \dots$$

Convoluția a două contururi de tip Gauss cu lățimile  $\Delta\omega_1$  și  $\Delta\omega_2$ , conduce tot la un contur de tip Gauss:

$$g_{G_1}(\omega, \Delta\omega_1) \otimes g_{G_2}(\omega, \Delta\omega_2) = g_G\left(\omega, \sqrt{\Delta\omega_1^2 + \Delta\omega_2^2}\right),$$

cu lățimea spectrală:

$$\Delta\omega_G = \sqrt{\Delta\omega_1^2 + \Delta\omega_2^2}.$$

Dacă lățimea omogenă și cea neomogenă sunt de același ordin de mărime, atunci problema determinării formei conturului se reduce la calcularea convoluției funcțiilor Lorentz și Gauss, adică se obțin integralele Voigt. În acest mod se poate stabili conturul tranziției spectrale  $g(\omega)$  ceea ce permite stabilirea dependenței de frecvență a coeficienților Einstein.

## 8. Mecanisme de lățire a tranzițiilor

spectrale care acționează într-o matrice-cristalină

### 8.1 Lățire dipolară

Acest mecanism de lățire a tranziției spectrale a unui sistem atomic (dipol electric) care aparține unui ansamblu ce dopeză o rețea cristalină, este rezultatul cuplajului dintre sistemele atomice vecine de același tip. Sistemele atomice de același tip sunt cuplate între ele datorită acoperirii reciproce a câmpurilor electrice și magnetice proprii. Pentru a se realiza suprapunerea acestor câmpuri este necesară o densitate suficient de mare a sistemelor de dopaj.

Un sistem atomic al ansamblului, dintr-o cauză oarecare, poate fi perturbat aleator. Aceasta va determina o perturbare aleatoare a câmpului propriu care, prin cuplajul amintit mai sus, va influența frecvența tranziției sistemului atomic cu care este cuplat. În acest mod frecvența de rezonanță, respectiv conturul tranziției, va prezenta o variație aleatoare în timp. Acest mecanism conduce la o defazare efectivă a câmpului secundar emis de către dipolul (sistem atomic) considerat, asemănătoare cu defazarea obținută ca rezultat al ciocnirilor dintr-un ansamblu sub formă de gaz. De aceea tratarea matematică, în cele două cazuri, este asemănătoare.

Deoarece lățirea dipolară este determinată de cuplajul dintre sistemele atomice de același tip, perturbarea unui sistem se transmite și celorlalte sisteme. Din această cauză mecanismul este de tip *omogen*.

În cazul materialelor laser solide mecanismul nu prezintă o contribuție deosebită la lățirea tranzițiilor spectrale deoarece pentru concentrațiile de dopaj realizate în mod obișnuit distanța dintre sistemele atomice de același tip este suficient de mare. În cazul materialelor laser cu concentrații mari de dopaj, răcite la temperatura He-lichid, când lățirea fononică devine neglijabilă, se înregistrează lățiri dipolare de câțiva kHz.

## 8.2 Lățire determinată de neomogeneitățile aleatoare ale rețelei cristaline.

La concentrații mari de dopaj cu sisteme atomice active pot apare tensiuni mecanice în rețeaua cristalină (din cauza dimensiunilor diferite ale sistemelor atomice de dopaj față de sistemele atomice de bază ale rețelei) sau neomogeneități ale distribuției acestora în rețea. Acestea determină modificări ale câmpului electric local care conduc la perturbarea, respectiv la deplasarea nivelurilor energetice ale sistemului atomic. De

ex. proprietățile stărilor energetice ale ionului de  $\text{Cr}^{3+}$  inclus în rețeaua cristalină  $\text{Al}_2\text{O}_3$  sunt complet diferite de cele ale ionului liber. Modificările locale ale rețelei cristaline determină *deplasări statice* ale nivelurilor energetice, respectiv modificări aleatoare ale frecvenței tranziției unui sistem atomic față de altul. Variații aleatoare de acest gen pot fi de asemenea determinate de dislocații, atomi străini interstițiali, atomi lipsă și alte defecte localizate în rețeaua cristalină-matrice.

Variația frecvenței tranziției determinată de aceste defecte aleatoare, la fel ca și lărgirea Doppler, nu largesc răspunsul individual al sistemului atomic, ci determină numai o deplasare aleatoare a frecvenței de rezonanță față de frecvența sistemului izolat. Ca rezultat răspunsul total al ansamblului de sisteme atomice este lătit în frecvență, mecanismul de lățire fiind de tip neomogen. Mărimea acestui efect variază de la eșanșion la eșanșion, depinzând de modul de creștere al cristalului, tehniciile de călire, concentrației sistemelor active și a impurităților (creșterea concentrației sistemelor atomice active, în general determină scăderea calității elementului activ). Dacă distribuția aleatoare a acestor defecte se supune legii de distribuție Gauss, atunci conturul spectral determinat de acest mecanism este de tip Gauss.

## 8.3 Lățirea fononică

În materialele active solide unul dintre cele mai importante mecanisme de lățire a nivelurilor energetice (respectiv a tranziției între două niveluri) este așa numita *lățire fononică*. Față de acest mecanism, lățirea dipolară a tranziției este aproape neglijabilă. De ex. în materialul activ de tip rubin ( $\text{Cr}^{3+} : \text{Al}_2\text{O}_3$ ) cu o concentrație a ionilor de  $\text{Cr}^{3+}$  de aprox. 0,05 %, densitatea acestora este  $n_v \approx 2,5 \cdot 10^{19}$  ioni/cm<sup>3</sup>, careia îi corespunde o distanță medie dintre ionii  $\text{Cr}^{3+}$  de  $\approx 30$  Å. Deoarece ionii  $\text{Cr}^{3+}$  sunt suficient de depărtați unul față de altul, lățirea dipolară este neglijabilă. De aceea frecvența tranziției între nivelurile ionului de  $\text{Cr}^{3+}$  va fi determinată în primul rând de influența ionilor imediat apropiați din rețeaua cristalină; în cazul considerat este importantă distanța dintre ionul  $\text{Cr}^{3+}$  și ionii de oxigen, respectiv de aluminiu.

O comprimare mecanică aplicată cristalului distorsionează rețeaua cristalină determinând modificarea câmpului local cristalin și ca rezultat se modifică valoarea energiei nivelurilor între care are loc tranziția, respectiv valoarea frecvenței tranziției. Ca rezultat apare o deplasare statică a frecvenței tranziției.

Dacă materialul activ se află în echilibru termodinamic ionii rețelei cristaline din vecinătatea unui ion activ prezintă modificări ale poziției determinate de vibrațiile termice ale rețelei. Din această cauză valoarea câmpului electric determinată de ionul vecin în punctul unde este localizat ionul activ variază periodic cu o frecvență egală cu frecvența de oscilație a rețelei cristaline. Modificarea periodică a câmpului determină o deplasare periodică a frecvenței tranziției ionului activ (o modularea a acesteia). Acest efect este cunoscut sub denumirea de *lățire fononică* (lățire termică determinată de modularea frecvenței tranziției la frecvența fononilor).

Efectul nu reprezintă o deplasare statică a frecvenței de rezonanță, ca în cazul neomogeneităților cristaline, ci o deplasare periodică a acesteia în jurul valorii frecvenței de rezonanță, cu o frecvență egală cu frecvența oscilațiilor termice ale rețelei cristaline, care este de ordinul a  $10^{12}$  Hz (Fig. 69).

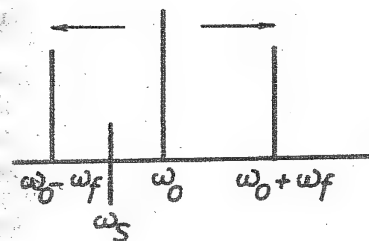


Fig. 69

Deoarece timpul de viață al unui sistem atomic este de ordinul a  $10^{-9}$  s, în acest interval de timp conturul lui lătit omogen se deplasează în domeniul spectral lătit fononic de aprox.  $10^4$  ori. Prin urmare frecvența tranziției (respectiv conturul tranziției) fiecărui atom activ, într-un interval de timp de  $10^{-12}$  s parcurge toate valorile din domeniul spectral al tranziției lățite termic; un semnal extern a cărui frecvență este cuprinsă în domeniul spectral lătit fononic poate interacționa în mod identic cu toate sistemele atomice active supuse procesului de lățire fononică. Din această cauză tranziția lătită fononic se comportă ca o tranziție lătită de tip omogen. Dacă durata pulsului este foarte mică, de ordinul frecvenței de oscilație al rețelei, atunci diferite sisteme atomice vor participa la interacțiune în mod diferit, iar tranziția se va comporta ca una de tip neomogen.

Experiențe efectuate la diferite temperaturi în domeniul  $(10 \div 1000)$  K au evidențiat dependența lățirii tranziției spectrale de temperatură. La temperaturi scăzute lățimea este determinată în special de neomogeneitățile întâmplătoare precum și de cele de tip dipolar, iar la temperaturi ridicate predomină lățirea fononică. În același timp s-a constatat că distorsiunile rețelei, precum și vibrațiile acesteia au tendința de a deplasa frecvența medie a tranziției spre frecvențe joase. Deci odată cu creșterea temperaturii vibrațiile rețelei cristaline determină pe de o parte lățirea fononică, iar pe de altă parte deplasarea frecvenței medii a tranziției spre valori mai mici ale frecvenței. Aceste deplasări se iau în considerare la proiectarea unui sistem laser constituit dintr-un oscilator-pilot și mai multe elemente active de amplificare. În timpul procesului de pompaj energia tranzițiilor neradiative contribuie la încălzirea aproape instantanee a cristalului ceea ce determină deplasarea medie a frecvenței chiar în timpul procesului de pompaj. Din această cauză este posibil ca frecvența radiației emise de către oscilatorul-pilot să fie deplasată față de banda de interacțiune a elementelor amplificatoare. De ex. s-a constatat că frecvența laserului de tip rubin la temperatura azotului lichid este de 6934 Å iar la temperatura camerei devine egală cu 6943 Å.

## 9. "Excitarea coerentă" a ansamblului de sisteme atomice

În cele analizate până acum s-a stabilit că într-un ansamblu de sisteme atomice în care se poate realiza o tranziție cuantică între două niveluri energetice (sau ansamblu de dipoli electrici atașați tranziției), sub acțiunea unui câmp al radiațiilor optice convenabil ales, se induce o polarizație care reprezintă sursa unor efecte optice de interacțiune dintre câmp și substanță.

Până la apariția laserilor, pentru a realiza această interacțiune, au existat numai surse de radiație optică care emit câmp cu grad mic al coerenței (așa numita *radiație termică*). Asemenea surse sunt de ex. toate lămpile care emit semnale cu spectru larg în mod continuu sau în pulsuri. În cadrul aceluiași efect este cuprinsă și excitarea sistemelor atomice într-o descărcare electrică în regim continuu sau în regim de pulsuri scurte de curent.

Deoarece componentele armonice ale radiației termice sunt necorelate (nu există o legătură între fazele acestor componente), nici momentele de dipol induse de

către acestea nu vor prezenta corelație de fază. În cazul excitării într-o descărcare în gaze (prin ciocniri electronice) de asemenea nu se realizează o corelație de fază între momentele de dipol induse în diferite sisteme atomice.

Dacă considerăm un ansamblu de sisteme atomice excitate foarte diluat și la temperatură scăzută, acestea se vor relaxa în special prin emisie spontană necoerentă (timp de relaxare  $T_1$ ), rata de amortizare fiind determinată de efectele radiative ( $\gamma = \gamma_{\text{rad}}$ ). Ciocnirile dintre sistemele atomice (dipolii electrici) vor determina defazarea mișcării oscilatorii (timp de relaxare  $T_2$ ), respectiv apariția fenomenului de relaxare neradiativă (aceste observații sunt caracteristice fenomenului de fluorescență).

Radiația optică obținută de la ansamblul de sisteme atomice prezintă caracteristicile esențiale ale zgomotului de bandă spectrală îngustă. Ea este centrată pe frecvența tranziției  $\omega_a$ , emisă în toate direcțiile (cu egală probabilitate în unghiul solid de  $4\pi \text{ sr}$ ) și într-un domeniu spectral îngust. Puterea inițială radiată este proporțională cu suma pătratelor puterilor radiate de către cei  $N_V$  dipoli individuali, adică este

proporțională cu  $N_V |p_{0x}|^2$ .

Apariția laserilor a permis efectuarea unor experimente de interacțiune a radiației optice cu substanța în care se utilizează pulsuri coerente. Câmpul aceste pulsuri prezintă un grad de coerență atât spectral cât și temporal suficient ridicat. Un asemenea puls face ca momentele de dipol induse în diferite sisteme atomice să fie corelate în fază, adică ansamblul de sisteme să se comporte ca un singur dipol electric gigantic valoarea inițială a momentului de dipol fiind egală cu  $N_V p_{0x}$ , respectiv puterea inițială a radiației emise de către ansamblul de dipoli ce oscilează coerent va fi proporțională cu  $N_V^2 |p_{0x}|^2$  (vezi prg. III 2.3).

Asemenea experiențe sunt cunoscute sub denumirea de *experiențe cu pulsuri coerente*, iar sistemele atomice ale ansamblului obținute ca rezultat al acțiunii unui puls coerent sunt cunoscute sub denumirea de *sisteme pregătite coerent* sau *aliniat transversal*. Prin asemenea experimente se poate demonstra *emisia radiației coerente* de către ansamblul de sisteme atomice pregătit coerent și efectul defazării asupra gradului de coerență a acesteia.

Considerăm că printr-un mod oarecare de excitare necoerentă se populează două niveluri excitate  $E_m$  și  $E_n$  între care se poate realiza o tranziție spectrală. Ulterior populațiile celor două stări se relaxează prin emisie spontană. Înainte ca populațiile să se relaxeze se acționează cu un puls coerent de durată foarte scurtă și de putere mare, a cărui frecvență trebuie să fie egală cu frecvența tranziției ( $\omega_{mn}$ ). Acest puls va induce în sistemele atomice excitate în stările  $E_m$  și  $E_n$  un moment de dipol  $p(t)$  corespunzător tranziției  $m \leftrightarrow n$ . Polarizația  $p(t)$  indusă în sistemul atomic va reprezenta soluția tranzitorie a ecuației ce descrie evoluția polarizației sub acțiunea



câmpului electric al pulsului aplicat (vezi prg. III 2.3). Starea staționară  $\tilde{P}(\omega)$  a susceptibilității nu poate fi atinsă deoarece durata pulsului aplicat este foarte scurtă.

Semnalul aplicat forțează sistemele atomice să oscileze în fază, atât spațial cât și temporal, prin urmare în ansamblu s-a indus o polarizație macroscopică coerentă. După trecerea semnalului prin ansamblu, sistemele atomice continuă să oscileze coerent (în fază). De aceea radiația emisă de către ansamblul pregătit în acest mod va prezenta coerență spațială și temporală, prin aceasta deosebindu-se de radiația emisă în mod spontan (zgomotul cuantic). Deoarece faza inițială a sistemelor atomice "pregătite coerent", determinată de câmpul perturbator, este aceeași, momentele dipolare individuale sunt "aliniat", iar rezultanta lor va avea o valoare foarte mare. Amplitudinea "oscilației coerente" a "momentului de dipol rezultat", precum și radiația

optică emisă de către acesta, se va amortiza cu rata  $\left(\frac{\gamma_0}{2} + \frac{1}{T_2}\right)$ , determinată de

procese radiative, respectiv cele de defazare. Dacă rata de amortizare prin procese de defazare  $(1/T_2)$  este rapidă față de ratele de amortizare  $\gamma_m$  și  $\gamma_n$ , atunci radiația coerentă prezentată mai sus se va disipa rapid, lăsând locul radiației sub formă de emisie spontană, slabă ca intensitate dar de durată lungă. Amortizarea exponențială a radiației coerente indusă de către pulsul inițial coerent este cunoscută sub denumirea de *amortizare liber indusă*. Pentru a putea înregistra acest fenomen sunt necesare receptoare de radiație foarte rapide.

De ex. o tranziție spectrală pentru un ansamblu de sisteme atomice sub formă de gaz poate să prezinte o lățime spectrală (preponderent de ciocniri) de aproximativ  $\Delta\omega/2\pi \cong 1\text{MHz}$ , căreia îi corespunde un timp mediu de defazare  $T_2 \cong 300\text{ns}$ .

În momentul de față pot fi obținute pulsuri coerente cu durată mult mai mică, care să fie utilizate pentru excitare. Acestea permit "alinieră transversală" a sistemelor atomice ale ansamblului considerat care vor emite un puls coerent amortizat cu o durată detectabilă, deoarece timpul de defazare este mare. În cazul ansamblului de sisteme atomice de tipul

YAG: Nd<sup>2+</sup> nu se poate realiza o asemenea situație. Deși timpul mediu de viață al nivelului superior al tranziției ionului de Nd<sup>2+</sup> este mare ( $\tau_2 \cong 230\mu\text{s}$ ), datorită fenomenului de interacțiune fononică prezent în matricea cristalină, timpul de defazare la temperatura camerei este  $T_2 \cong 1\text{ps}$ , ceea ce face imposibilă observarea fenomenului cu dispozitivele actuale.

## Cap. VII

### SUSCEPTIBILITATEA CORESPUNZATOARE UNEI TRANZIȚII CUANTICE A UNUI ANSAMBLU DE SISTEME ATOMICE

#### 1 Proprietățile de polarizare ale tranzițiilor atomice.

Tranziția sistemului atomic între niveluri energetice prezintă caracteristici anizotrope, ce pot fi exprimate numai printr-o mărime tensorială. Aceste caracteristici se manifestă atât în emisie spontană cât și în răspunsul tranziției la o acțiune externă. În cazul cel mai simplu răspunsul poate fi polarizat liniar sau circular, însă în general răspunsul este eliptic polarizat, elipsa fiind raportată la un sistem de referință specific. Răspunsul indus al ansamblului este descris de tensorul susceptibilității care realizează legătura dintre semnalul aplicat (câmpul vectorial *em* aplicat) și vectorul polarizației atomice indus sub acțiunea semnalului.

Pentru a demonstra necesitatea acestui tensor, vom analiza caracteristicile unor tranziții ale unui ansamblu de atomi liberi, plasați într-un câmp magnetic constant, câmp ce fixează spațial o axă de simetrie la care atomii se pot raporta. Cazul cel mai simplu este cel al tranziției între un nivel inferior singlet (stare *S*), caracterizat prin momentul total  $J = 0$  și un nivel superior (stare *P*), pentru care  $J = 1$ . Stări *P* îi corespund  $2J+1 = 3$  stări cuantice, care energetic coincid, deci factorul de degenerare este egal cu 3.

Dacă atomul este dispus în câmp magnetic constant, interacțiunea dintre atom și câmp (efect Zeemann), determină despicarea nivelului degenerat în 3 stări energetice distincte, caracterizate prin numerele cuantice  $m_J = 1, 0, -1$ . În acest mod în spectru se vor manifesta trei tranziții cu frecvențe distincte (fig. 70). Dacă se analizează starea de polarizare a radiației corespunzătoare tranziției  $S(m_J = 0) \leftrightarrow P(m_J = 0)$ , se constată că este polarizată liniar ca și cum ar fi radiată de către un dipol electric oscilant a cărui axă este orientată de-a lungul inducției câmpului magnetic aplicat; de-a lungul inducției magnetice sistemul radiant considerat nu emite radiație optică. Această

constatare este confirmată și de analiza răspunsului atomului, dispus în câmp magnetic, supus acțiunii unui semnal  $em$  exterior; sistemul considerat nu reacționează la acțiunea componentei electrice a câmpului radiației optice dacă aceasta acționează perpendicular pe direcția inducției. Asemenea tranziții, caracterizate prin  $\Delta m_J = 0$ , sunt cunoscute sub denumirea de tranziții  $\pi$ .

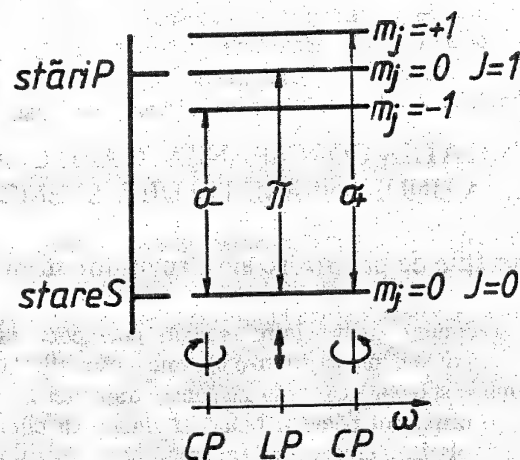


Fig. 70

De asemenea s-a stabilit că starea de polarizare a radiației corespunzătoare tranzițiilor  $S(m_J = 0) \Leftrightarrow P(m_J = +1, m_J = -1)$  este polarizată circular față de axa câmpului magnetic, cu sensuri de circulație opuse, atât în cazul emisie cât și în cazul răspunsului tranziției sistemului atomic dispus în câmp magnetic la acțiunea câmpului  $em$  extern. Aceste tranziții, caracterizate prin  $\Delta m_J = \pm 1$ , sunt denumite tranziții  $\sigma_+$ , respectiv  $\sigma_-$ .

Pentru a descrie starea de polarizare a radiației emise de către ansamblul de sisteme atomice la tranzițiile prezentate este necesară analiza caracteristicilor cuantice ale tranziției atomice.

În teoria cuantică, starea cuantică a unui atom este complet determinată dacă se cunoaște funcția de undă cuantică  $\Psi(\mathbf{r}, t)$ , unde  $t$  - reprezintă momentul la care se determină starea, iar  $\mathbf{r}$  - vectorul de poziție. Evoluția în spațiu și timp a funcției de undă se supune ecuației Schrödinger. Pentru a stabili expresia funcției de undă  $\Psi(\mathbf{r}, t)$  a unui atom în condiții inițiale date sau în cazul acțiunii asupra acestuia a unui semnal extern este necesară rezolvarea ecuației Schrödinger.

Un sistem cuantic izolat (de ex. un atom) este caracterizat printr-un set de stări cuantice cu energie  $E_j$  ("stări staționare"), cărora le sunt asociate funcțiile de undă

$\varphi(\mathbf{r})$ , care reprezintă soluțiile independente de timp ale ecuației Schrödinger, corespunzătoare stării sistemului. Funcțiile de undă ale stărilor staționare ale sistemului atomic formează un set de bază (set de moduri normale), cu ajutorul cărora se poate reprezenta, în fiecare moment, orice stare cuantică a sistemului atomic.

Starea unui sistem cuantic, la un moment dat, nu poate fi reprezentată numai printr-o funcție de undă a setului de bază (sistemul cuantic nu se poate afla numai într-o singură stare energetică), ci printr-un amestec al stărilor cuantice de bază, dependent de timp, a cărui funcție de undă este de forma:

$$\begin{aligned} \Psi(\mathbf{r}, t) = & \tilde{C}_1(t) e^{-i \frac{E_1}{\hbar} t} \varphi_1(\mathbf{r}) + \\ (1.1) \quad & + \tilde{C}_2(t) e^{-i \frac{E_2}{\hbar} t} \varphi_2(\mathbf{r}) + \dots + \tilde{C}_j(t) e^{-i \frac{E_j}{\hbar} t} \varphi_j(\mathbf{r}) \end{aligned}$$

În absența perturbației externe (a semnalului extern aplicat sistemului atomic) coeficientul complex  $\tilde{C}_j(t)$  nu depinde de timp, dependența de timp a funcției de undă

$$\Psi(\mathbf{r}, t) \text{ fiind inclusă numai în factorul } \exp\left(-i \frac{E_j}{\hbar} t\right).$$

Din relația (1.1) rezultă următoarele:

- Un sistem cuantic (atomul) nu se poate afla exact într-o stare energetică dată, ci numai într-o situație reprezentată printr-un amestec al stărilor de bază. Sistemul cuantic individual prezintă probabilitatea  $|\tilde{C}_1(t)|^2$  pentru a se afla în

starea energetică  $E_1$ , respectiv, probabilitatea  $|\tilde{C}_2(t)|^2$  pentru a se afla în starea  $E_2$ , etc. Dacă considerăm un ansamblu format din  $n_v$  sisteme cuantice (atomi), atunci din acestea  $n_1$  vor avea energia  $E_1$ , respectiv  $n_2$  energia  $E_2$ ,...

- dacă sistemului cuantic nu i se aplică o perturbație externă amestecul de stări este staționar, adică factorii  $\tilde{C}_j(t)$  nu depind de timp. Factorul  $\exp\left(-i \frac{E_j}{\hbar} t\right)$ , dependent de timp, din dezvoltarea funcției de undă  $\Psi(\mathbf{r}, t)$  după

modurile normale, este necesar pentru a face ca funcția de undă să reprezinte o soluție a ecuației Schrödinger.

Să analizăm interpretarea fizică a funcțiilor de undă totale ale sistemului cuantic. Dintre mărimile introduse pentru a caracteriza stare sistemului cuantic, prezintă

semnificație fizică mărimea pătratului funcției de undă totale  $|\Psi(\mathbf{r}, t)|^2$ . Această mărime măsoară probabilitatea de a găsi un electron orbital în punctul localizat prin vectorul  $\mathbf{r}$  (în sistemul de coordonate considerat), la momentul  $t$ . Prin urmare, valoarea cuantică "așteptată" a densității de sarcină electrică, la momentul  $t$ , în punctul  $\mathbf{r}$  al norului electronic este:

$$(1.2) \quad \rho(\mathbf{r}, t) = -e|\Psi(\mathbf{r}, t)|^2.$$

Să determinăm densitatea de sarcină electrică în cazul particular al unui sistem cuantic cu două stări energetice (funcția de undă totală este reprezentată de amestecul celor două stări energetice). În acest scop este necesar să se calculeze expresia:

$$(1.3) \quad \begin{aligned} |\Psi(\mathbf{r}, t)|^2 &= \left[ \tilde{C}_1(t)\phi_1(\mathbf{r})e^{-i\frac{E_1}{\hbar}t} + \tilde{C}_2(t)\phi_2(\mathbf{r})e^{-i\frac{E_2}{\hbar}t} \right]^2 = \\ &= |\tilde{C}_1(t)|^2|\phi_1(\mathbf{r})|^2 + |\tilde{C}_2(t)|^2|\phi_2(\mathbf{r})|^2 + \\ &+ \tilde{C}_1(t)\tilde{C}_2^*(t)\phi_1(\mathbf{r})\phi_2^*(\mathbf{r})\exp\left(i\frac{E_1-E_2}{\hbar}t\right) + \\ &+ \tilde{C}_1^*(t)\tilde{C}_2(t)\phi_1^*(\mathbf{r})\phi_2(\mathbf{r})\exp\left(-i\frac{E_1-E_2}{\hbar}t\right) = \\ &= \Phi_{\text{constant}}(\mathbf{r}) + \Phi_{\text{osc.}}(\mathbf{r}, t) \end{aligned}$$

Prin urmare densitatea de sarcină electrică conține o componentă statică (independentă de timp) și o componentă oscilantă cu frecvența  $\omega_{21}$  dată de partea reală a sumei produselor complexe din relația (1.3):

$$(1.4) \quad \Phi_{\text{osc.}}(\mathbf{r}, t) = \text{Re}[\tilde{C}_1(t)\tilde{C}_2^*(t)\phi_1(\mathbf{r})\phi_2^*(\mathbf{r})\exp(i\omega_{21}t)].$$

unde:  $\omega_{21} = \frac{E_1 - E_2}{\hbar}$ , reprezintă frecvența tranziției între cele două stări considerate.

Componentei oscilatorii i se poate atribui un moment de dipol cuantic, care poate fi comparat cu momentul de dipol oscilant clasic  $\mathbf{p}(t)$ . Mărimea momentului de dipol cuantic este proporțională cu produsul amplitudinilor  $\tilde{C}_1(t)\tilde{C}_2^*(t)$ , corespunzător celor două stări energetice, iar rata amortizării acestora coincide cu rata de amortizare ( $\gamma$ ) a dipolului clasic. Faza variației oscilatorii a densității de sarcină electrică este dată de diferența de fază a coeficienților complexi.

$$\tilde{C}_1(t) = |\tilde{C}_1(t)|e^{-i\phi_1}; \quad \tilde{C}_2(t) = |\tilde{C}_2(t)|e^{-i\phi_2},$$

$$\tilde{C}_1^*(t)\tilde{C}_2(t) = |\tilde{C}_1(t)\tilde{C}_2^*(t)|e^{-i(\phi_1 - \phi_2)}$$

Faza stărilor energetice individuale poate fi perturbată aleator de către procesele de defazare externe, chiar fără a se modifica modulul coeficientului complex

(probabilitatea de populare a nivelului energetic:  $|\tilde{C}_1|^2$ , respectiv  $|\tilde{C}_2|^2$ ).

## 2. Proprietățile de polarizare ale tranzițiilor cuantice tip Zeemann.

Folosind rezultatul obținut relativ la densitatea de sarcină electrică oscilantă, respectiv momentul de dipol oscilant, să analizăm drept ex. tranzițiile de tip Zeemann (despicarea Zeemann). Considerăm reprezentarea spațială tridimensională a distribuției de sarcină electrică corespunzătoare diferitelor stări staționare, respectiv unui amestec de stări.

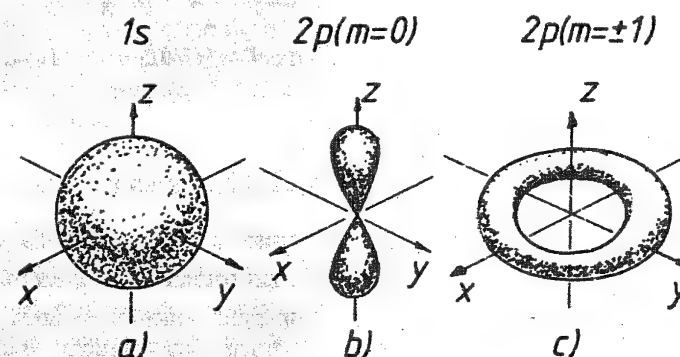


Fig. 71

Pentru a ne imagina reprezentare spațială și a urmări evoluția în timp a amestecului, trebuie să considerăm faptul că funcția de undă  $\Psi(\mathbf{r}, t)$  este complexă, deci în fiecare punct al spațiului ea prezintă atât un modul, cât și un unghi de fază. De ex. pentru starea  $S(J=0)$ , distribuția spațială prezintă o distribuție sferică (Fig. 71a). În cazul stării  $P_0(J=1, m_J=0)$ , distribuția spațială este prezentată în fig. 71 b. Funcția de undă  $P_0$  prezintă semne opuse în lobul superior față de cel inferior. În cazul stării  $P_{\pm 1}(J=1, m_J=\pm 1)$ , distribuția spațială are o formă toroidală, iar funcția de undă prezintă o variație de fază  $[\exp(\pm i\theta)]$  pentru diferite puncte dispuse în jurul torului (Fig. 71 c).



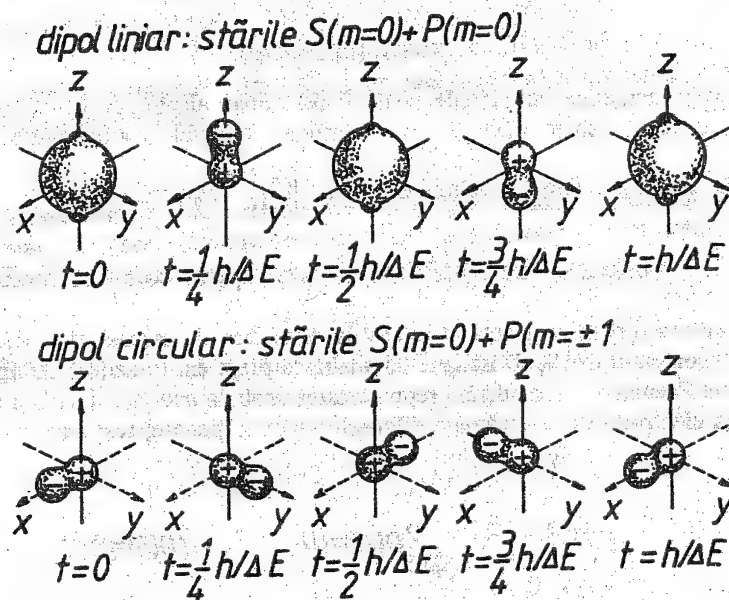


Fig. 72

Să analizăm rezultatul tranzițiilor între aceste stări. Dacă tranziția are loc între stările  $1S$  și  $2P_0$ , funcția de undă totală va fi reprezentată de amestecul funcțiilor de undă a celor două stări. Într-un punct dat al spațiului funcțiile de undă ale stărilor componente ale funcției totale vor interfera constructiv sau distructiv funcție de faza mărimii complexe  $\tilde{C}_1 \varphi_1(\mathbf{r})$ , respectiv  $\tilde{C}_2 \varphi_2(\mathbf{r})$ ; rezultatul interferenței se va

"roți" cu frecvența  $\omega_{21}$ , datorită termenului  $\exp\left(-i\frac{E_j}{\hbar}t\right)$ . Pentru o perioadă a

variației acestui termen, densitatea de sarcină electrică, proporțională cu  $|\Psi(\mathbf{r}, t)|^2$ , corespunzătoare tranziției între stările  $1S$  și  $2P_0$  va avea forma prezentată în fig. 72. Norul sarcinilor electronice rezultate oscilează de-a lungul axei  $z$ , adică se comportă ca un dipol clasic oscilant liniar (tranziție tip  $\pi$ ).

Să analizăm rezultatul tranziției între starea inferioară  $1S$  și cea superioară  $2P_1$ . Din cauza dependenței factorului  $\exp(i\theta)$  al funcției de undă staționare a stării  $P_1$  de variația unghiului  $\theta$ , la suprapunerea celor două funcții de undă, față de axa de

rotație poate avea loc "interferență constructivă", iar în partea opusă "interferență distructivă". Deoarece valoarea mărimilor  $\tilde{C}_1 e^{-i\frac{E_1}{\hbar}t}$  și  $\tilde{C}_2 e^{-i\frac{E_2}{\hbar}t}$  se rotește în

timp, rezultatul "interferenței constructive"  $|\varphi_1(\mathbf{r}) + \varphi_2(\mathbf{r})|^2$ , de asemenea se rotește în jurul axei  $z$  cu frecvența tranziției. De aceea atomul radiază la fel ca un oscilator circular polarizat în planul  $(x, y)$ . Tipul de polarizație va fi funcție de numărul cuantic magnetic al ( $m_j = \pm 1$ ) al nivelului superior.

Radiația optică liniară și circular polarizată se observă în special la tranzițiile corespunzătoare unui atom sau moleculă liberă. Radiația corespunzătoare tranzițiilor sistemelor atomice ce formează o rețea cristalină sau o moleculă complexă, în general este eliptic polarizată cu un plan de polarizare arbitrar orientat, elipticitate arbitrară și cu orientare arbitrară a axelor elipsei în planul de polarizare.

Rezultatele descrise mai sus reprezintă proprietatea de polarizare cuantomecanică a radiației optice emisă la tranziția între două stări energetice a sistemului atomic. Acestea pot fi explicate cu ajutorul modelului clasic al dipolului electric atașat tranziției. Rezultatele sunt confirmate atât în emisiă spontană cât și de fenomenele forțate. Dacă un atom a cărui distribuție de sarcină electrică, pentru o tranziție dată, oscilează după o singură direcție, atunci tranziția va răspunde la acțiunea semnalului *em* extern numai dacă intensitatea câmpului electric are aceeași direcție de acțiune ca și polarizarea tranziției.

### 3. Expresia caracteristicilor tensoriale ale susceptibilității.

După cum s-a stabilit în prg. 2, radiația emisă de către sistemul atomic la tranziția între două stări energetice, respectiv răspunsul cuantic al sistemului la acțiunea unui câmp *em* rezonant cu tranziția, prezintă caracteristici de polarizare. Din această cauză răspunsul ansamblului de sisteme atomice la acțiunea câmpului *em* extern (polarizația), corespunzător unei tranziții date, respectiv susceptibilitatea ansamblului trebuie să prezinte caracteristici tensoriale.

Considerăm un ansamblu de dipoli electrici reali cărui  $i$  se aplică un semnal *em* armonic ( $\omega$ ) rezonant. În regim staționar, considerând dependența liniară de intensitatea câmpului electric, polarizația ansamblului este dată de relația:

$$\tilde{P}(\omega) = \tilde{\chi}(\omega) \epsilon \tilde{E}(\omega),$$

unde  $\tilde{\chi}(\omega)$  reprezintă un tensor  $3 \times 3$  cu componentele  $\tilde{\chi}_{xx}(\omega)$ ,  $\tilde{\chi}_{xy}(\omega)$ , ...

În continuare sunt analizate caracteristicile tensoriale ale susceptibilității.

#### a) Tensorul susceptibilității

unui ansamblu de dipoli electrici liniari aliniați.

Vom considera cel mai simplu exemplu și anume cel reprezentat de oscilatorul electronic liniar. Pentru a calcula susceptibilitatea este necesar să apreciem polarizația

ansamblului, deci să considerăm numărul de dipoli din unitatea de volum. Legătura dintre componenta  $\tilde{P}_x(\omega)$  a polarizației induse și componenta  $\tilde{E}_x(\omega)$  a câmpului *em* armonic excitator este:

$$\tilde{P}_x(\omega) = \tilde{\chi}_{xx}(\omega) \tilde{E}_x(\omega).$$

Sarcina electrică a dipolului electric nu poate efectua deplasări de-a lungul direcțiilor *y* și *z*, deci sistemul nu va reacționa la acțiunea componentelor  $\tilde{E}_y(\omega)$  și  $\tilde{E}_z(\omega)$  ale câmpului *em*. Răspunsul ansamblului considerat la acțiunea câmpului *em* extern poate fi prezentat sub formă matricială:

$$(3.1) \quad \tilde{P}(\omega) = \begin{bmatrix} \tilde{P}_x(\omega) \\ \tilde{P}_y(\omega) \\ \tilde{P}_z(\omega) \end{bmatrix} = \tilde{\chi}(\omega) \epsilon \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{E}_x(\omega) \\ \tilde{E}_y(\omega) \\ \tilde{E}_z(\omega) \end{bmatrix},$$

unde apare un tensor adimensional, cu urma  $\text{Tr}[T] = 3$ , și o mărime complexă  $\tilde{\chi}(\omega)$  care, în cazul unei tranziții Lorentz omogene, este dată de o relație asemănătoare cu (II 2.3):

$$(3.2) \quad \tilde{\chi}(\omega) = -i \frac{1}{4\pi^2} \frac{\Delta n_v \lambda^3 \gamma_{\text{rad}}}{\Delta\omega} \frac{1}{1 + i \frac{\omega - \omega_0}{\Delta\omega/2}},$$

unde factorul 3 a fost introdus în mărimea tensorului adimensional.

#### b) Ansamblu de dipoli electrici aliniați polarizați circular.

Considerăm o tranziție cuantică a unui sistem atomic a ansamblului considerat care poate fi modelată cu ajutorul unui dipol electric "polarizat circular" ( $\sigma_{\pm}$ ) raportat la planul (*x, y*). Relația se poate scrie sub forma matricială:

$$(3.3) \quad \tilde{P}(\omega) = \begin{bmatrix} \tilde{P}_x(\omega) \\ \tilde{P}_y(\omega) \\ \tilde{P}_z(\omega) \end{bmatrix} = \tilde{\chi}(\omega) \epsilon \frac{3}{2} \begin{bmatrix} 1 & \mp i & 0 \\ \pm i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{E}_x(\omega) \\ \tilde{E}_y(\omega) \\ \tilde{E}_z(\omega) \end{bmatrix},$$

unde  $\tilde{\chi}(\omega)$  este dat de relația (3.2), iar factorul 3/2 face ca urma matricei să fie egală cu trei.

Dacă un semnal *em* armonic liniar polarizat după direcția *x*:

$$\tilde{E}_x(\omega) = \tilde{E}_0(\omega), \quad \tilde{E}_y(\omega) = \tilde{E}_z(\omega) = 0$$

acționează asupra ansamblului considerat, polarizația indusă în acesta va prezenta componentele complexe:

$$\tilde{P}_x(\omega) = \frac{3}{2} \chi(\omega) \epsilon \tilde{E}_0(\omega), \quad \tilde{P}_y(\omega) = \pm i \frac{3}{2} \chi(\omega) \epsilon \tilde{E}_0(\omega).$$

Partea reală a componentelor polarizației va fi de forma:

$$\tilde{P}_x(\omega, t) = \text{Re}[\tilde{P}_x(\omega) e^{i\omega t}] = \frac{3}{2} |\tilde{\chi}(\omega) \epsilon \tilde{E}_0| \cos(\omega t + \theta)$$

$$\tilde{P}_y(\omega, t) = \text{Re}[\tilde{P}_y(\omega) e^{i\omega t}] = \frac{3}{2} |\tilde{\chi}(\omega) \epsilon \tilde{E}_0| \sin(\omega t + \theta)$$

unde  $\theta$  reprezintă modificarea fazei.

Deși semnalul *em* aplicat este liniar polarizat, polarizația indusă  $P(\omega, t)$  este circular polarizată în planul (*x, y*), direcția vectorului polarizație se rotește ( $x \rightarrow y$ ) pentru semnul (+) și ( $x \rightarrow -y$ ) pentru semnul (-). Forma (3.3) a susceptibilității conduce la comportare circular polarizată a polarizației induse, ea fiind caracteristică tranzițiilor de tip  $\sigma$  de dipol electric și unor tranziții de dipol magnetic. Dacă se efectuează o rotație față de sistemul de coordonate, atunci forma tensorului devine mai complicată.

#### c) Cazul răspunsului polarizat eliptic.

Din punct de vedere cuantic tranziția este caracterizată prin elementul matricei de dipol electric  $\tilde{p}_{21}$  de forma unei matrici-coloană:

$$\tilde{p}_{21} = \int \Psi_2^*(r) (-er) \Psi_1(r) dr = \begin{bmatrix} \tilde{p}_{21x} \\ \tilde{p}_{21y} \\ \tilde{p}_{21z} \end{bmatrix}.$$

Forma conjugat-hermitică ( $\tilde{p}_{21}^+$ ) este reprezentată printr-o matrice-linie, ale cărei elemente  $[\tilde{p}_{21x}^*, \tilde{p}_{21y}^*, \tilde{p}_{21z}^*]$  sunt complex-conjugatele elementelor matricii-coloană.

Dacă asupra sistemului atomic (dipolului electric atașat tranziției) acționează un câmp *em* armonic rezonant  $\tilde{E}(\omega)$ , valoarea așteptată a fazorului momentului de dipol indus de către câmpul aplicat tranziției este:

$$\tilde{p} = \text{ct} [\tilde{p}_{21}^+ \tilde{E}(\omega) \tilde{p}_{21}] = \text{ct} [\tilde{p}_{21x}^* \tilde{p}_{21y}^* \tilde{p}_{21z}^* \begin{bmatrix} \tilde{E}_x(\omega) \\ \tilde{E}_y(\omega) \\ \tilde{E}_z(\omega) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{p}_{21x} \\ \tilde{p}_{21y} \\ \tilde{p}_{21z} \end{bmatrix}] =$$

(3.4)

$$= \text{ct} \begin{bmatrix} \tilde{p}_{21x} \\ \tilde{p}_{21y} \\ \tilde{p}_{21z} \end{bmatrix} [\tilde{p}_{21x}^* \tilde{p}_{21y}^* \tilde{p}_{21z}^* \begin{bmatrix} \tilde{E}_x(\omega) \\ \tilde{E}_y(\omega) \\ \tilde{E}_z(\omega) \end{bmatrix}]$$

(unde s-a folosit proprietatea de asociativitate a matricilor și produsul cu un vector). Conform relației (3.4), momentul de dipol indus depinde atât de proprietățile de polarizare ale elementului de matrice al tranziției  $\tilde{p}_{21}$  cât și de starea de polarizare a semnalului aplicat (răspunsul dipolului electric la acțiunea câmpului *em* aplicat depinde de cuplajul polarizării elementului de dipol electric cu polarizarea câmpului aplicat).

Polarizația macroscopică indusă în ansamblul de atomi reprezintă momentul de dipol al unității de volum, adică medierea asupra momentelor de dipol induse în sistemele atomice ale unității de volum. Răspunsul indus  $\tilde{P}(\omega)$  al ansamblului va depinde de răspunsurile individuale ale sistemelor atomice ale ansamblului precum și de dispunerea reciprocă a acestora.

Produsul  $\tilde{p}_{21} \times \tilde{p}_{21}^+$  poate fi considerat sub forma:

$$(3.5) \quad T = \text{ct} \begin{bmatrix} \tilde{p}_{21x} \\ \tilde{p}_{21y} \\ \tilde{p}_{21z} \end{bmatrix} [\tilde{p}_{21x}^* \tilde{p}_{21y}^* \tilde{p}_{21z}^*] = \begin{bmatrix} \tilde{t}_{xx} & \tilde{t}_{xy} & \tilde{t}_{xz} \\ \tilde{t}_{yx} & \tilde{t}_{yy} & \tilde{t}_{yz} \\ \tilde{t}_{zx} & \tilde{t}_{zy} & \tilde{t}_{zz} \end{bmatrix},$$

unde *ct.* reprezintă o constantă de normare. Elementul *nm* al matricei *T* se obține prin înmulțirea elementului *n* al matricei-coloană  $\tilde{p}_{21}$  cu elementul *m* al vectorului-linie.

Polarizația macroscopică a unui ansamblu de dipoli aliniați se scrie sub forma:

$$P(\omega) = \text{ct} \cdot \tilde{p}_{21} \cdot \tilde{p}_{21}^+ \times \tilde{E}(\omega) = \tilde{\chi}(\omega) \epsilon T \tilde{E}(\omega).$$

De ex. presupunem că elementul matricei de tranziție  $\tilde{p}_{21}$  este vectorul-coloană

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ corespunzător rotirii spre dreapta a radiației polarizate în planul } (x, y).$$

Conjugatul hermitic  $\tilde{p}_{21}^+$  este vectorul-linie  $[1, i, 0]$ , iar tensorul adimensional al susceptibilității va fi:

$$T = \frac{3}{2} [1, i, 0] \begin{bmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{3}{2} \begin{bmatrix} 1 & -i & 0 \\ i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

adică reprezintă rezultatul rotirii spre dreapta.

Momentul tranziției cuantice  $\tilde{p}_{21}$  are trei componente complexe ( $\tilde{p}_{21x}, \tilde{p}_{21y}, \tilde{p}_{21z}$ ) sau 6 numere reale independente prin intermediul cărora se poate calcula forma generală a tensorului *T*. Forma cea mai generală a răspunsului va fi un răspuns tensorial polarizat eliptic, cu o polarizație indusă  $\tilde{P}(\omega)$  caracterizată printr-o elipticitate fixă, dar arbitrară și o orientare arbitrară a axelor elipsei într-un plan de referință raportat la axele  $(x, y, z)$ . Un asemenea răspuns se poate obține din compunerea a două răspunsuri tensoriale liniar independente orientate reciproc perpendicular, cu amplitudini diferite și un unghi de fază arbitrar. În acest mod se obține un răspuns eliptic polarizat cu elipticitate arbitrară, dispus în planul  $(x, y)$ . Efectuând o rotație a coordonatelor  $(x, y, z)$  se pot genera toate formele posibile ale tensorului susceptibilității.

Din cele 9 elemente complexe ale tensorului normat al susceptibilității, 4 parametri sunt ajustabili, ceilalți 5 caracterizează răspunsul eliptic: orientarea în spațiu a elipsei (3 parametri), gradul elipticității și condiția de normare a tensorului (urma tensorului  $\tilde{t}_{xx} + \tilde{t}_{yy} + \tilde{t}_{zz} = 3$ ).

Orientarea spațială a sistemului de referință pentru tensorul susceptibilității poate fi fixată de perturbația aplicată: direcția câmpului magnetic constant (efectul Zeeman) sau direcția câmpului electric constant (efect Starck), considerate de-a lungul direcției *z*.

De ex. pentru atomii liberi, răspunsul în câmp magnetic static poate fi liniar de-a lungul axei (tranziție- $\pi$ ) sau se poate roti în jurul axei *z* (tranziție- $\sigma$ ). Prin urmare nu se poate fixa direcția axelor  $(x, y)$ .

În cazul unei rețele cristaline răspunsul tensorial este raportat la axele de simetrie ale rețelei. În cazul moleculelor, tensorul se raportează la axele de simetrie ale configurației de echilibru a acestora. Din cele prezentate rezultă că răspunsul unei tranziții reale nedegenerate nu poate fi izotrop.

Răspunsul izotrop este de forma:

$$(3.6) \quad \tilde{P}(\omega) = \begin{bmatrix} \tilde{P}_x(\omega) \\ \tilde{P}_y(\omega) \\ \tilde{P}_z(\omega) \end{bmatrix} = \tilde{\chi}(\omega) \epsilon \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{E}_x(\omega) \\ \tilde{E}_y(\omega) \\ \tilde{E}_z(\omega) \end{bmatrix},$$

urma matricei caracteristice acestui răspuns fiind  $\text{Tr}[T] = 3$ .



Un răspuns izotrop poate fi obținut numai ca rezultat al medierii asupra ansamblului de sisteme atomice și anume:

- răspunsul unui sistem atomic al ansamblului poate fi anizotrop cu o formă a tensorului nedegenerat analizată mai sus; sistemele atomice ale ansamblului pot prezenta axe de referință orientate aleator (de ex. în cazul unui gaz sau un material necristalin: lichid, pudră, sticlă). Mediarea asupra orientării axelor sistemelor atomice conduce la un răspuns izotrop.

- răspunsul izotrop poate să provină din sumarea asupra unui set de tranziții degenerate, adică tranziții ce nu pot fi rezolvate în frecvență dacă nu s-a aplicat o perturbare externă care să înlăture degenerarea. Deoarece tranzițiile degenerate coincid în frecvență, ele nu pot fi excitate separat pentru a înregistra răspunsul individual. Sumarea prin suprapunere a răspunsurilor individuale conduce la un răspuns izotrop deoarece nu se poate defini o axă unică de referință pentru fiecare sistem atomic, axele de referință fiind orientate aleator, cu egală probabilitate, în toate direcțiile.

În aceste cazuri răspunsul ansamblului de sisteme atomice va fi izotrop, conform relației (3.6), iar expresia susceptibilității  $\tilde{\chi}(\omega)$  va fi dată de relația (3.2), fără factorul 3.

În cazul unui asemenea ansamblu se poate considera că de-a lungul unei direcții a sistemului rectangular de axe de coordonate sunt orientate  $n_v/3$  sisteme atomice care prezintă răspuns liniar polarizat. Prin urmare pentru susceptibilitate se poate considera relația (3.2) (cu factorul 3), dar numărul de sisteme atomice participante la răspuns urmează să fie înlocuit cu  $n_v/3$ , ceea ce conduce la același rezultat.

#### 4. Analiza energetică a interacțiunii dintre ansamblul de sisteme atomice și perturbarea *em*.

Rata transferului mediu de energie prin intermediul polarizării induse  $p(t)$  de la câmpul *em* aplicat la ansamblul de dipoli electrici (sisteme atomice), calculată pentru unitatea de volum este:

$$(4.1) \quad \frac{dU_a}{dt} = \left\langle \mathbf{e}(t) \cdot \frac{d\mathbf{P}(t)}{dt} \right\rangle.$$

Considerând că s-a realizat regimul staționar al interacțiunii cu un câmp *em* armonnic rezonant ( $\omega = \omega_a$ ), relația (4.1) se scrie:

$$(4.2) \quad \frac{dU_a}{dt} = -\omega_0 \chi_0'' \frac{\tilde{\mathbf{E}}^* \tilde{\mathbf{T}} \tilde{\mathbf{E}} + \tilde{\mathbf{E}} \tilde{\mathbf{T}}^* \tilde{\mathbf{E}}^*}{4}.$$

Densitatea de energie a câmpului *em* armonnic este dată de relația:

$$(4.3) \quad U_{\text{semnal}} = \left\langle \frac{\varepsilon}{2} \mathbf{e}^2(t) \right\rangle = \frac{\varepsilon}{2} |\tilde{\mathbf{E}}^* \cdot \tilde{\mathbf{E}}|$$

Raportul dintre rata transferului de energie și densitatea de energie este:

$$(4.4) \quad \frac{1}{U_{\text{sem}}} \frac{dU_a}{dt} = -\omega_0 \chi_0'' \frac{\tilde{\mathbf{E}}^* \tilde{\mathbf{T}} \tilde{\mathbf{E}} + \tilde{\mathbf{E}} \tilde{\mathbf{T}}^* \tilde{\mathbf{E}}^*}{2 \tilde{\mathbf{E}}^* \cdot \tilde{\mathbf{E}}} \quad !!!!!.$$

Valoarea factorului adimensional din relația (4.4) este cuprinsă între zero și trei, funcție de starea de polarizare a câmpului *em* aplicat și de forma normată a tensorului-răspuns caracteristic ansamblului de sisteme atomice (dipoli electrici).

În diferite situații acest factor are următoarele valori:

- a) *ansamblu constituit din dipoli electrici aliniați*

Nivelurile energetice implicate în tranziție sunt nedegenerate, iar dipolii electrici atașați tranziției sunt orientați după aceeași direcție. În această situație, dacă se aplică un câmp *em* liniar polarizat, acesta poate fi cuplat cu ansamblul de dipoli astfel încât răspunsul ansamblului să fie maxim, prin urmare factorul adimensional din relația (4.4) va avea valoarea trei:

$$\frac{1}{U_{\text{sem}}} \frac{dU_a}{dt} = 3\omega_0 \chi_0''.$$

De asemenea dacă ansamblul de dipoli este aliniat va exista o orientare a direcției de acțiune a câmpului electric al semnalului *em* extern pentru care valoarea factorului adimensional va fi egală cu zero (tranziția de dipol polarizată liniar prezintă un plan în care răspunsul indus este egal cu zero).

Dacă asupra ansamblului de dipoli electrici aliniați acționează un semnal extern a cărui direcție de acțiune a câmpului electric este dispusă între cuplajul maxim și minim, valoarea factorului adimensional va fi cuprinsă între valorile extreme:  $3\omega_0 \chi_0'' \div 0$ .

- b) *dacă ansamblul de dipoli nu este aliniat* (orientarea spațială a dipolilor este aleatoare), atunci tensorul-răspuns la acțiunea câmpului extern liniar polarizat va fi izotrop, iar valoarea factorului adimensional va fi egală cu unitatea:

$$\frac{1}{U_{\text{sem}}} \frac{dU_a}{dt} = 1 \cdot \omega_0 \chi_0''.$$

- c) *dacă ansamblul de dipoli nu este aliniat*, iar semnalul *em* aplicat este nepolarizat, de asemenea valoarea factorului adimensional va fi egală cu unitatea;

- d) *în general valoarea factorului adimensional* (răspunsul ansamblului de sisteme atomice corespunzător tranziției date la acțiunea componentei electrice a câmpului *em* extern) depinde atât de tipul polarizării tranziției cât și de structura polarizării câmpului *em* aplicat.

Pentru a marca aceste valori posibile ale factorului adimensional, în expresia susceptibilității s-a introdus "factorul-3\*" (trei stelat).

#### 5. Niveluri de energie degenerate

a) distribuția densității populației pe subnivelurile unui nivel energetic degenerat

În prg. IV 1 s-a arătat că un nivel energetic dat poate fi degenerat (factor de degenerare  $g$ ), adică este constituit dintr-un număr de subniveleuri (stări energetice) fiecare fiind caracterizat prin seturi de numere cuantice diferite, dar toate având aceeași energie. Tranziția cuantică ce se poate realiza între două niveluri energetice degenerate ( $E_1$  și  $E_2$ , caracterizate prin  $g_1$  și  $g_2$ ), respectiv interacțiunea rezonantă dintre această tranziție și câmpul *em* extern cu frecvența  $\omega_{12}$ , va reprezenta sumarea asupra unui număr de tranziții având aceeași energie, dar caracterizate prin tări și proprietăți de polarizare diferite, funcție de combinația subniveleurilor inițiale și finale.

Considerăm popularea celor două niveluri energetice, la echilibru termodinamic sau în afara acestuia, egală cu  $n_1$  respectiv  $n_2$ . În ansamblul de subsisteme degenerate, dacă nivelul este populat, acționează un proces de relaxare rapidă care determină egalizarea rapidă a populației subniveleurilor (stărilor), chiar dacă un grup de subniveleuri ale nivelului degenerat este perturbat, față de situația de egalizare a populației, printr-un semnal rezonant extern foarte intens.

Din această cauză, la echilibru termodinamic se poate considera că populațiile sunt repartizate egal pe subniveleuri și anume  $\frac{n_1}{g_1}$ , respectiv  $\frac{n_2}{g_2}$ . Distribuția

Boltzmann se aplică riguros pe subniveleuri, deci:

$$(5.1) \quad \frac{n_2/g_2}{n_1/g_1} = \exp\left(-\frac{E_2 - E_1}{kT}\right), \text{ adică: } \frac{n_2}{n_1} = \frac{g_2}{g_1} \exp\left(-\frac{E_2 - E_1}{kT}\right).$$

Ca o consecință a relației (5.1), este posibil ca la echilibru termodinamic, populația unui nivel energetic puternic degenerat să fie mai mare decât populația unui nivel energetic inferior mai slab degenerat ( $g_2 \gg g_1$ ), dacă este îndeplinită condiția:

$\frac{g_2}{g_1} \exp\left(-\frac{E_2 - E_1}{kT}\right) > 1$ . Această situație nu exprimă realizarea inversiei de populație deoarece nu conduce la fenomenul de amplificare a semnalului optic rezonant incident pe ansamblul considerat.

#### b) rata relaxării radiative totale

Viteza de variație a populației nivelului energetic degenerat  $E_2$  determinată de relaxarea radiativă este dată de relația:

$$(5.2) \quad \frac{dn_2(t)}{dt} = - \sum_{r=1}^{g_1} \sum_{s=1}^{g_2} \gamma_{\text{rad},2s \rightarrow 1r} \frac{n_2(t)}{g_2},$$

fiind determinată de contribuția relaxărilor radiative de pe subniveleurile nivelului energetic superior pe toate subniveleurile nivelurilor energetice inferioare.

Rata trebuie să fie identică cu rata de relaxare radiativă măsurată de factorul

$\gamma_{\text{rad},2 \rightarrow 1}$ :

$$(5.3) \quad \frac{dn_2(t)}{dt} = -\gamma_{\text{rad},2 \rightarrow 1} n_2(t).$$

Din relațiile (5.2) și (5.3) rezultă:

$$(5.4) \quad \gamma_{\text{rad},2 \rightarrow 1} \equiv \frac{1}{g_2} \sum_{r=1}^{g_1} \sum_{s=1}^{g_2} \gamma_{\text{rad},2s \rightarrow 1r}.$$

#### c) Expresia susceptibilității în cazul unei tranziții degenerate

Pentru a evalua mărimea răspunsului corespunzător tranziției între două niveluri degenerate este necesară sumarea răspunsurilor individuale corespunzătoare tranzițiilor între subniveleuri ( $E_{1r} \leftrightarrow E_{2s}$ ). Expresia tensorului susceptibilității corespunzător unei tranziții individuale este:

$$\tilde{\chi}_{1r,2s}(\omega) = \gamma_{\text{rad},2s \rightarrow 1r} \left( \frac{n_1}{g_1} - \frac{n_2}{g_2} \right) T_{2s \rightarrow 1r} \tilde{g}(\omega),$$

unde:  $T_{2s \rightarrow 1r}$  - tensorul-răspuns al tranziției particulare,  $\left( \frac{n_1}{g_1} - \frac{n_2}{g_2} \right)$  - diferența

densităților populațiilor corespunzătoare tranziției particulare,  $\gamma_{\text{rad},2s \rightarrow 1r}$  - factorul de amortizare radiativ (tăria) tranziției particulare. Mărimea:

$$\tilde{g}(\omega) = -i \frac{\lambda^3}{4\pi^2 \Delta\omega} \frac{1}{1 + 2i \frac{\omega - \omega_0}{\Delta\omega}},$$

reprezintă un factor ce descrie conturul spectral al tranziției individuale. Mărimea  $\tilde{g}(\omega)$  este aceeași pentru toate tranzițiile particulare dacă acestea sunt caracterizate prin aceeași lățime spectrală.

În aceste condiții răspunsul total corespunzător tranziției între cele două niveluri degenerate va fi:

$$(5.5) \quad \begin{aligned} \chi_{\text{tot}}(\omega) &= \sum_{r=1}^{g_1} \sum_{s=1}^{g_2} \chi_{1r,2s}(\omega) = \\ &= \tilde{g}(\omega) \sum_{r=1}^{g_1} \sum_{s=1}^{g_2} \gamma_{\text{rad},2s \rightarrow 1r} \left( \frac{n_1}{g_1} - \frac{n_2}{g_2} \right) T_{\text{mediu}} \end{aligned}$$

unde  $T_{\text{mediu}}$  - tensorul susceptibilității mediat pe toate tranzițiile particulare implicate în tranziția totală.

Folosind rezultatul (5.4) relația (5.5) devine:

$$(5.6) \quad \chi_{1r,2s}(\omega) = \tilde{g}(\omega) \gamma_{\text{rad},2 \rightarrow 1} \left( \frac{g_2}{g_1} n_1 - n_2 \right) T_{\text{mediu}} =$$

$$= -i \frac{3^* \lambda^3 \gamma_{\text{rad},2 \rightarrow 1}}{4\pi \Delta\omega} \left( \frac{g_2}{g_1} n_1 - n_2 \right) \frac{1}{1 + 2i \frac{\omega - \omega_0}{\Delta\omega}}$$

unde s-a presupus că  $T_{\text{mediu}}$  este izotrop, deci factorul  $(3^*)$  are valoarea unu. Cazul

$3^* = 1$  ( $T_{\text{mediu}}$  - izotrop) corespunde de ex. unei tranziții între două niveluri energetice ale unui ansamblu sub formă de gaz format din atomi aliniați întâmplător (nealineați). În cazul unei tranziții între niveluri degenerate ale sistemelor atomice ce formează o matrice solidă situația este mai complexă în sensul că tensorul  $T_{\text{mediu}}$  poate prezenta caracteristici anizotrope.

Rezultatul (5.6) este asemănător cu expresia (V 6.1) a susceptibilității nedegenerate, cu excepția diferenței densității de populație, care devine:

$$\Delta n \rightarrow \frac{g_2}{g_1} n_1 - n_2.$$

Prin urmare condiția de inversie de populație (de câștig):  $n_2(t) > n_1(t)$ , corespunzătoare tranziției între două niveluri energetice nedegenerate, în cazul a două niveluri degenerate trebuie înlocuită cu:

$$\frac{n_2}{g_2} > \frac{n_1}{g_1},$$

adică este necesar să se realizeze inversie de populație pe subnivelurile între care se realizează tranziția individuală. Acest rezultat presupune că subnivelurile nivelului energetic degenerat rămân egal populate, densitatea de populație fiind egală cu  $\frac{n}{g}$ .

Pentru semnale *em* externe rezonante sub formă de câmpuri *em* foarte intense sau pentru pulsuri *em* foarte scurte față de rata de relaxare de ciocnire ( $T_2$ ), este posibil ca unele tranziții ( $E_{1r} \leftrightarrow E_{2s}$ ) să răspundă mai intens la semnalul aplicat decât altele, din cauza valorilor substanțial diferite ale coeficienților de relaxare  $\gamma_{\text{rad},2s \rightarrow 1r}$ , respectiv caracteristicilor de polarizare diferite. În acest caz este posibil ca semnalul aplicat să "forțeze" sistemele atomice să-și schimbe distribuția de populație

pe subniveluri în sensul că ele vor tranzita între subnivelurile ( $E_{1r} \leftrightarrow E_{2s}$ ) cu rate diferite.

Ratele diferite ale tranzițiilor vor distruge echilibrul distribuției densității populațiilor pe subniveluri, în special dacă, din anumite cauze, relaxarea populației între subniveluri este lentă față de evoluția în timp a semnalului perturbator. În acest mod se poate realiza un pompaj selectiv între subniveluri în special dacă degenerarea este ușor perturbată (ruptă), ceea ce reprezintă elementul esențial al tehnicii cunoscută sub denumirea de *tehnica prin pompaj optic*.

Dacă degenerarea nu este perturbată, totdeauna există procese de relaxare între subniveluri care tind să realizeze o distribuție egală a populațiilor. Aceste procese de relaxare "încrucișată" (cross-relaxation) sunt foarte rapide deoarece, având loc în interiorul nivelului energetic degenerat, redistribuția densității de populație se realizează fără schimb de energie. Însă este posibil ca evoluția în timp a unor semnale intense aplicate să depășească evoluția în timp a acestor procese de relaxare, dar numai pentru un interval de timp foarte scurt.

În cazul experiențelor cu "pulsuri coerente" (ansamblu de sisteme atomice aliniate), tranzițiile între nivelurile degenerate nu pot fi tratate drept tranziții între niveluri nedegenerate ușor perturbate. Ele trebuie considerate ca un set de tranziții multiple și independente, deși sunt puternic cuplate la aceeași frecvență.



## Cap. VIII

### INTERACȚIUNEA ANSAMBLULUI DE SISTEME ATOMICE CU FASCICULE INTENSE DE RADIAȚIE OPTICĂ

În capitolele anterioare a fost analizată dinamica sistemului atomic (dipol electric atașat tranziției), respectiv a ansamblului de sisteme atomice, supus acțiunii unui semnal *em* rezonant. Ca rezultat a fost introdusă noțiunea de susceptibilitate electrică liniară, respectiv ecuațiile cinetice ale populației nivelurilor energetice implicate în tranziție, populații ce determină mărimea susceptibilității. Ambele caracteristici au fost introduse considerând aproximația regimului staționar al interacțiunii. Dacă ansamblului i se aplică un semnal *em* foarte intens (sau unul foarte scurt), atunci aproximația folosită (regim staționar al răspunsului) nu mai este valabilă, fiind necesară analiza răspunsului neliniar.

#### 1. Cazul semnalului *em* de amplitudine mică.

Să analizăm condițiile fizice în care este valabilă această aproximație. Considerăm relațiile de bază care conduc la ecuațiile cinetice ale densității populației celor două niveluri energetice ale sistemului cuantic și aproximațiile implicate la considerarea acestora.

Evoluția în timp a polarizației ansamblului considerat indusă de acțiunea semnalului *em*, conform prg. I 4.2, este descrisă de ecuația diferențială:

$$(1.1) \quad \frac{d^2 \mathbf{P}_x(t)}{dt^2} + \gamma \frac{d\mathbf{P}_x(t)}{dt} + \omega_a^2 \mathbf{P}_x(t) = \frac{n_v e^2}{m_e} \mathbf{e}_x(t)$$

care, folosind relația (I 7.6), devine:

$$(1.1') \quad \frac{d^2 \mathbf{P}_x(t)}{dt^2} + \gamma \frac{d\mathbf{P}_x(t)}{dt} + \omega_a^2 \mathbf{P}_x(t) = \frac{3\omega_a \varepsilon \lambda_a^3 \gamma_r}{4\pi^2} n_v \mathbf{e}_x(t).$$

Folosind corespondența dintre caracteristicile modelului de dipol electric clasic și cele ale momentului de dipol cuantic atașat tranziției se poate trece la o ecuație echivalentă care descrie din punct de vedere cuantic evoluția în timp a valorii așteptate a polarizației  $\langle \mathbf{P}(t) \rangle$  a ansamblului de sisteme atomice cu două niveluri energetice:

$$(1.2) \quad \frac{d^2 \mathbf{P}_x(t)}{dt^2} + \Delta\omega_a \frac{d\mathbf{P}_x(t)}{dt} + \omega_a^2 \mathbf{P}_x(t) = \frac{3^* \omega_a \varepsilon \lambda_a^3 \gamma_r}{4\pi^2} \Delta n_{12}(t) \mathbf{e}_x(t) = K \Delta n_{12}(t) \mathbf{e}_x(t)$$

unde  $\omega_a$  - frecvența tranziției,  $\Delta\omega_a = \gamma + \frac{2}{T_2}$  - lățimea spectrală a acestuia

(factorul  $\gamma$  include amortizarea radiativă și cea neradiativă, iar  $\frac{2}{T_2}$  se referă la lățimea colizională),  $\gamma_r$  - factorul de amortizare radiativă, iar  $\Delta n_{12}(t)$  - diferența densității populațiilor celor două niveluri la momentul considerat. Susceptibilitatea electrică, conform relației (V 6.1), este proporțională cu valoarea  $\Delta n_{12}(t)$ .

Pentru a calcula susceptibilitatea liniară  $\tilde{\chi}_{12}(\omega)$  corespunzătoare tranziției este necesar să se rezolve ecuația (1.2), considerând un semnal *em* aplicat staționar, iar diferența de populație  $\Delta n_{12}(t)$  - constantă în timp.

Până acum în ecuațiile cinetice ale populațiilor  $n_1(t)$  și  $n_2(t)$ , respectiv  $\Delta n_{12}(t)$ , s-a presupus că valoarea densității de populație este constantă în timp. În acest scop s-a considerat că atât valoarea susceptibilității liniare (proporțională cu  $\Delta n_{12}(t)$ ), cât și ecuațiile cinetice (care descriu variația mărimii  $\Delta n_{12}(t)$ ) sunt respectate dacă se acceptă că variația în timp a diferenței de populație  $\Delta n_{12}(t)$  este relativ lentă. Să analizăm condițiile în care se poate accepta această presupunere.

Să considerăm răspunsul tranzitoriu al polarizației ansamblului la acțiunea unui semnal sinusoidal:  $\mathbf{e}(t) = \tilde{E}_1 \sin \omega_a t$ , rezonant ( $\omega \cong \omega_a$ ) aplicat la momentul  $t = 0$  ( $\tilde{E}_1$  - fazorul semnalului considerat). Răspunsul tranzitoriu va fi de forma:

$$(1.3) \quad \mathbf{P}_x(t) \cong -K \frac{\Delta n_{12} \tilde{E}_1}{\omega_a \Delta\omega_a} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{t}{T_2}\right) \right] \cos \omega_a t,$$

unde s-a presupus că lățirea colizională este predominantă. Relația (1.3), constituită din doi termeni, arată că răspunsul tranzitoriu este o oscilație cosinusoidală forțată, care tinde la regimul staționar cu o constantă de timp  $T_2$ .

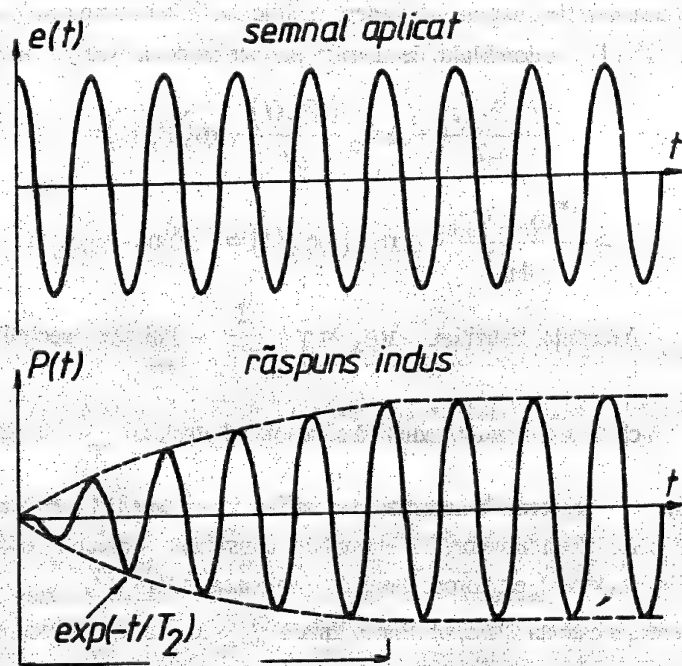


Fig. 73

În prg. I 4.2 s-a stabilit că, la acțiunea semnalului  $em$ , mărimea răspunsului forțat al polarizației  $P(t)$ , în regim staționar, este diferită de zero numai dacă frecvența semnalului extern este în rezonanță sau în apropierea acesteia față de frecvența tranziției.

Conform rezultatelor descrise de relația (1.3) răspunsul sinusoidal forțat al polarizației ansamblului urmărește variațiile amplitudinii (sau fazei) câmpului  $em$  aplicat în limitele unui interval de timp de tranziție aproximativ egal cu  $T_2$  (fig. 73). Prin urmare aproximația în rezolvarea ecuației polarizației este justă și permite stabilirea stării staționare, respectiv a răspunsului tranzitoriu, dacă mărimea  $\Delta n(t)$  poate fi considerată constantă, adică dacă rata variației tranzitorii a lui  $\Delta n(t)$  este lentă față de constanta de timp  $T_2$ . Cu alte cuvinte este importantă rata variației temporale a mărimei  $\Delta n(t)$ , nu variațiile mici ale amplitudinii mărimei  $e(t)$ .

Prin urmare variațiile amplitudinii sau fazei semnalului perturbator  $e(t)$  cu o rată superioară lui  $T_2$  nu pot fi sesizate de către ansamblul de sisteme cuantice, deoarece acesta nu poate prezenta răspuns la asemenea perturbări. Această observație poate fi analizată și sub altă formă: tranziția atomică prezintă o lățime finită ( $\Delta\omega_a$ ), iar variațiile rapide ale amplitudinii sau fazei câmpului perturbator sunt echivalente cu prezența unor frecvențe laterale față de  $\omega_a$ , care, funcție de rata variației pot fi dispuse în afara lățimii tranziției răspunsului atomic. Ca rezultat aceste frecvențe laterale induc un răspuns foarte slab sau acesta poate lipsi complet.

Să analizăm evoluția în timp a diferenței populației celor două niveluri energetice  $\Delta n(t)$  sub acțiunea unui semnal  $em$  intens. Evoluția este descrisă de o ecuație diferențială asemănătoare cu (V 5.8 sau V 5.12):

$$(1.4) \quad \frac{d[\Delta n(t)]}{dt} + \frac{\Delta n(t) - \Delta n_0}{T_1} = -\frac{2}{\hbar\omega} e(t) \frac{dP(t)}{dt},$$

unde termenul din dreapta descrie schimbul de putere între câmpul  $em$  perturbator și ansamblul de sisteme cuantice (prin intermediul polarizației), exprimat în număr de fotoni (factorul 2 evidențiază faptul că în cadrul interacțiunii cu fotonii un sistem cuantic dispare de pe nivelul energetic superior și apare pe cel inferior, diferența populației variind cu două unități).

Relația (1.4) este justă și din punctul de vedere al mecanicii cuantice, putând fi folosită pentru a calcula valoarea așteptată a energiei sau a diferenței populației  $\Delta n$  într-un ansamblu de sisteme cuantice cu două niveluri energetice. Față de (V 5.8), ecuația (1.4) este mai generală în sensul că poate fi utilizată și în cazul semnalelor de intensitate mare, deoarece nu mai este limitată de legătura dintre  $e(t)$  și  $P(t)$  ce apare în cazul staționar al amplitudinii și fazei.

Considerăm un semnal  $em$  cvazisinusoidal de forma:

$$(1.5) \quad e(t) = \text{Re}[\tilde{E}(t)\exp(i\omega_a t)],$$

aplicat ansamblului de sisteme cuantice considerat, adică un semnal a cărui frecvență este în apropierea rezonanței, dar fazorul lui depinde de timp (amplitudinea și faza sunt modulate). Răspunsul ansamblului la acțiunea câmpului se poate presupune de forma:

$$(1.6) \quad P(t) = \text{Re}[\tilde{P}(t)\exp(i\omega_a t)].$$

În aceste condiții partea dreaptă a ecuației (1.4) devine:

$$\begin{aligned} -\frac{2}{\hbar\omega} e(t) \frac{dP(t)}{dt} &= -\frac{i}{2\hbar} (\tilde{E} e^{i\omega_a t} + \tilde{E}^* e^{-i\omega_a t}) (\tilde{P} e^{i\omega_a t} - \tilde{P}^* e^{-i\omega_a t}) = \\ &= \frac{i}{2\hbar} [\tilde{E}(t)\tilde{P}^*(t) - \tilde{E}^*(t)\tilde{P}(t)] - \frac{i}{2\hbar} [\tilde{E}(t)\tilde{P}(t)e^{i2\omega t} - \tilde{E}^*(t)\tilde{P}^*(t)e^{-i2\omega t}] \end{aligned}$$

adică, alături de un termen cvaziconstant, apare și un termen cu frecvențe ( $\pm 2\omega$ ) care este generator de câmpuri armonice (la frecvențe duble, triple sau combinații).

Răspunsul diferenței de populație  $\Delta n(t)$  din ecuația (1.4), la aplicarea câmpului (1.5) nu poate urmări variațiile fazorului  $\tilde{E}(t)$  deoarece timpul de relaxare  $T_1$  în mod normal este mare față de variațiile aleatoare ale fazorului câmpului  $em$ . Variațiile mărimii  $\Delta n(t)$ , la o anumită frecvență, se obțin ca rezultat al integrării ecuației (1.4) pe un interval de timp. Ca rezultat al integrării, după cum s-a stabilit în prg. I 4.2 sau V 5, termenul *cvaziconstant* conduce la o variație semnificativă a mărimii  $\Delta n(t)$ , în timp ce contribuția termenului proporțional cu  $\exp(\pm i2\omega t)$ , după integrare pe câteva perioade optice, tinde la o valoare neglijabilă.

Dacă semnalul perturbator este foarte intens, termenii armonici vor determina o modulare slabă, dar diferită de zero, a variației diferenței de populație  $\Delta n(t)$  la frecvența  $2\omega$ . Această variație a populației  $\Delta n(t)$  va acționa asupra valorii  $P(t)$  din dreapta ecuației și se va amesteca cu termenul  $(\pm \omega)$  din  $e(t)$ , conducând la apariția unor termeni sumă ( $2\omega + \omega = 3\omega$ ), respectiv diferență ( $2\omega - \omega = \omega$ ). Termenii cu frecvența  $3\omega$  vor determina apariția unei polarizații cu aceeași frecvență care va fi sursa unui câmp  $em$  de aceeași frecvență. Acest lanț de efecte armonice poate continua spre ordine superioare, dar intensitatea efectelor (a câmpului radiat) scade cu creșterea ordinului. Semnale perturbatoare foarte intense vor determina apariția unor armonici de ordin par în variația lui  $\Delta n(t)$ , care vor reacționa determinând răspunsuri armonice de ordin impar ale polarizației și invers.

Răspunsuri armonice de ordin superior se evidențiază la generarea armonicilor și intermodulare sau, la intensități mari ale semnalului perturbator, pot apărea fenomene de amestec. Aceste efecte neliniare reprezintă obiectul opticii neliniare.

Dacă se neglijează termenii generatori de armonici, ecuația (1.4) are forma:

$$\frac{d[\Delta n(t)]}{dt} + \frac{\Delta n(t) - \Delta n_0}{T_1} = -\frac{i}{2\hbar} [\tilde{E}(t)\tilde{P}^*(t) - \tilde{E}^*(t)\tilde{P}(t)]$$

Considerând aproximația susceptibilității electrice liniare:

$$\tilde{P}(t) \approx \tilde{\chi} \tilde{E}(t) \equiv (\chi' + i\chi'') \tilde{E}(t)$$

(unde mărimea  $\tilde{\chi}$  este proporțională cu  $\Delta n(t)$  - vezi relația V 6.1), ecuația (1.4) devine:

$$\frac{d[\Delta n(t)]}{dt} + \frac{\Delta n(t) - \Delta n_0}{T_1} \approx -\frac{\varepsilon \chi''}{\hbar} |\tilde{E}(t)|^2 \approx -2W_{12} \Delta n(t),$$

adică se obține ecuația (V 5.8).

Ecuația diferențială (1.4) scoate în evidență faptul că poate fi urmărită orice variație a mărimii  $\Delta n(t)$ . Soluția tranzitorie a acestei ecuații, presupunând un semnal cu amplitudine constantă, exprimată prin  $W_{12}$ , aplicat la momentul  $t$ , este de forma:

(1.7)

$$\Delta n(t) = \Delta n_{st. stab.} + [\Delta n(t_0) - \Delta n_{ss}] \exp \left[ - \left( 2W_{12} + \frac{1}{T_1} \right) (t - t_0) \right],$$

unde:  $\Delta n_{ss}$  reprezintă valoarea staționară parțial saturată a lui  $\Delta n(t)$ , care se obține pentru  $t \rightarrow \infty$ .

Condiția ca rata variației populației  $\left( \frac{d[\Delta n(t)]}{dt} \right)$  să fie lentă față de

constanta de amortizare  $\left( \frac{2}{\Delta \omega_a} \right)$  a dipolului electric este:

$$(1.8) \quad \left( 2W_{12} + \frac{1}{T_1} \right) \ll \Delta \omega_a = \frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2}.$$

Din această inegalitate rezultă condiția:  $T_1 \gg T_2$ , adică lărgirea tranziției să fie esențial determinată de efectul de defazare (colizional), condiție satisfăcută de majoritatea tranzițiilor laser. Fiind îndeplinită această condiție, este necesar ca intensitatea semnalului perturbator să satisfacă condiția:

$$(1.8') \quad W_{12} \ll \Delta \omega_a,$$

adică rata tranziției stimulate să fie mică față de lățimea tranziției. Această condiție, pentru o tranziție de dipol electric, este echivalentă cu:

$$(1.9) \quad |\tilde{E}|^2 \ll \frac{(\hbar \omega_a)^2}{\varepsilon \hbar \gamma_r \lambda^3}.$$

Din punct de vedere cuantic această condiție evidențiază faptul că perturbarea energiei interne a sistemului cuantic de către câmpul  $em$  trebuie să fie mică față de lățirea omogenă a tranziției exprimată în unități energetice ( $\hbar \Delta \omega_a$ ).

Condiția (1.8) sau echivalența ei (1.9) este îndeplinită în majoritatea sistemelor laser de mare putere, deoarece acestea generează pe tranziții atomice cu lățime foarte mică. De ex. lățimea tranziției în laserii cu gaz este cuprinsă în domeniul  $(0,1 \div 10) \text{ GHz}$ , iar în cazul laserilor solizi în domeniul  $(10^2 \div 10^3) \text{ GHz}$ . Valoarea timpului tranzitoriu de răspuns al polarizației se află în domeniul  $(10^{-8} \div 10^{-12}) \text{ sec}$ , corespunzător  $(0,1 \div 10^3) \text{ GHz}$ . Rata tranzițiilor stimulate în aceleași materiale se poate evalua egalând densitatea de putere laser (extrasă din unitate de volum de la mediul laser) cu densitatea inversiei de populație  $\Delta n$  (pe unitate de volum) înmulțită cu  $\hbar \omega$  și cu rata tranzițiilor stimulate de către semnal ( $W_{ij}$ ). Se obține o valoare a ratei tranzițiilor stimulate cuprinsă în domeniul  $(10^3 \div 10^7) \text{ sec}^{-1}$ , adică condiția impusă este satisfăcută.



În ansamblul de sisteme atomice valoarea densității de populație  $n_m(t)$  variază în timp și datorită fenomenelor de relaxare și a celor de pompaj, însă în materialele concrete aceste relaxări, față de inversul lărimii spectrale, sunt foarte lente. De ex. constanta de relaxare  $(1/W_{mn})$ , respectiv cea de pompaj  $(1/W_{mn})$  se află în domeniul de valori:  $10^{-3}$  sec (rubin), respectiv  $10^{-4}$  sec ( $Nd^{2+}$ : YAG sau  $Nd^{2+}$ : sticlă), în timp ce inversul lărimii spectrale  $(\frac{1}{\Delta\omega})$  a acestor materiale se află în domeniul  $10^{-11}$  sec.

În laserii cu coloranți timpul de relaxare, respectiv cel al tranziției stimulate, este mai rapid (domeniul  $(10^{-9} \div 10^{-12})$  sec), însă inversul lărimii spectrale a acestor materiale este de ordinul  $\frac{1}{\Delta\omega_a} \approx 10^{-13}$  sec, deci condiția este îndeplinită.

Să analizăm dacă în aproximația considerată rămâne valabilă condiția de saturație a diferenței de populație prezentată în prg. V 5.2. Intensitatea semnalului necesară pentru a obține saturație într-un ansamblu de sisteme cuantice cu două niveluri trebuie să îndeplinească condiția:  $2W_{12}T_1 \geq 1$  sau  $W_{12} \geq \frac{1}{2}T_1$ , iar condiția de a fi în domeniul ecuațiilor cinetice este (1.8). Combinând cele două condiții se obține:

$$(1.10) \quad \frac{1}{2T_1} \leq W_{12} \leq \Delta\omega_a \equiv \frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2}$$

Dacă este satisfăcută condiția:

$$\frac{1}{T_1} \ll \Delta\omega_a, \text{ adică: } T_2 \ll T_1,$$

relația (1.10) arată că diferența de populație poate fi saturată fără a încălca limitele impuse ecuațiilor cinetice. Această condiție este satisfăcută de majoritatea materialelor laser: rata relaxării energiei aproape în toate cazurile este mai lentă față de lăimea tranziției, deoarece lăimea este în general determinată de mecanisme de defazare sau chiar de cele neomogene, care sunt mult mai intense de cât cele de lărgire prin timp de viață.

Să analizăm cazul general adică efectul semnalelor intense în sistemele atomice *multinivel*.

Modelul de dipol electric rezonant (susceptibilitatea electrică liniară asociată acestuia), respectiv ecuațiile cinetice ale populației sistemului cuantic *multinivel*, conduc la un set de ecuații care permite analiza răspunsului sistemului cuantic *multinivel* la acțiunea câmpului *em* extern rezonant. În cazul sistemelor cuantice *multinivel* tranziției individuale *i* se atașează un model de dipol rezonant iar populațiile

$n_m(t)$  și  $n_n(t)$  asociate celor două niveluri ale tranziției sunt considerate *cvazistationare*. Polarizația (susceptibilitatea rezonantă corespunzătoare fiecărei tranziții) poate fi utilizată în ecuațiile Maxwell pentru a descrie amplitudinea, faza, polarizarea respectiv caracteristicile tensoriale ale răspunsului atomic pe o tranziție particulară. Evoluția în timp a mărimii dipolului electric rezonant este descrisă de o ecuație diferențială vectorială de ordinul doi; aceasta conține informații asupra amplitudinii, fazei și proprietățile tensoriale ale răspunsului tranziției.

Ecuațiile cinetice descriu transferul de energie între semnalul perturbator și ansamblul de sisteme atomice, prin urmare conțin informații relativ la mărimea intensității răspunsului sistemului atomic, dar nu conțin informații despre fază. Ele reprezintă un set cuplat de ecuații diferențiale de ordinul întâi care conțin populațiile tuturor nivelurilor energetice, mecanismele de relaxare și cele de pompaj, precum și semnalele *em* rezonante perturbatoare aplicate simultan ansamblului.

Prin urmare fiind dat un sistem cuantic *multinivel* care interacționează simultan cu mai multe semnale rezonante se poate folosi polarizația (sau susceptibilitatea) corespunzătoare fiecărei tranziții pentru a determina variația fazei, câștigul și reacția determină variația fazei, câștigul și reacția inversă asupra semnalului aplicat și ecuațiile cinetice pentru a obține populația rezultantă a nivelurilor. Combinația acestor două aproximații conduce la descrierea răspunsului sistemului atomic la acțiunea câmpului *em* aplicat.

Există situații în care semnalul aplicat poate să încalce condițiile ecuațiilor ratelor. În acest caz apar efecte neliniare: amestec neliniar al frecvențelor, intermodulare, semnale armonice și fenomenul Rabi. Analiza detaliată a acestor fenomene se poate realiza folosind metodele analitice avansate ale mecanicii cuantice ca de ex. "matricea de densitate" și ecuațiile Bloch care sunt foarte utile pentru a analiza efectele de semnal intens și neliniare în sistemele cuantice cu două niveluri.

## 2. Interacțiunea ansamblului de sisteme atomice cu semnale *em* intense.

Considerăm o valoare a intensității semnalului *em* perturbator ce depășește pe cea impusă de condiția (1.8). Să analizăm în acest caz reacția ansamblului de sisteme atomice folosind un model care presupune trei condiții simplificatoare, și anume:

- considerăm un semnal perturbator rezonant:

$e(t) = \tilde{E}_1(t) \exp(i\omega t)$ , unde  $\tilde{E}_1(t)$  - amplitudine lent dependentă de timp față de frecvența câmpului. Se poate presupune de asemenea că amplitudinea este foarte intensă dar constantă (independentă de timp), și se aplică brusc la momentul  $t = 0$ .

- în cazul semnalelor intense și cel al efectelor tranzitorii considerăm polarizația ansamblului de sisteme cuantice sub forma:

$$P(t) = \text{Re}[\tilde{P}(t) \exp(i\omega t)] = \text{Re}[-i\tilde{P}(t) \exp(i\omega t)].$$

Prin urmare, pentru a putea analiza efectele tranzitorii ale răspunsului atomic, acceptăm că amplitudinea polarizației  $\tilde{P}_1(t)$  este dependentă de timp. De asemenea deoarece

semnalul  $em$  aplicat este la rezonanță, răspunsul  $P(t)$  va fi defazat față de acesta cu  $(-\pi/2)$ ; acest fapt se evidențiază atașând factorul  $(-i)$  fazorului  $\tilde{P}_1(t)$ . Dacă se introduce această relație în ecuația (1.2), separând termenii în  $\exp(\pm i\omega t)$  se obține ecuația ce descrie evoluția în timp a amplitudinii  $\tilde{P}_1(t)$ :

$$(2.1) \quad \frac{d^2 P_1(t)}{dt^2} + (i2\omega_a + \Delta\omega_a) \frac{dP_1(t)}{dt} + i\omega_a \Delta\omega_a P_1(t) = iKE_1(t)\Delta n(t).$$

Se poate neglija  $\Delta\omega_a$  față de  $\omega_a$  deoarece  $\Delta\omega_a \ll \omega_a$ . În ceea ce privește dependența de timp a mărimii  $\Delta\omega_a P_1(t)$ , aceasta este lentă față de dependența mărimii  $\omega_a P_1(t)$ . Cu alte cuvinte fazorul  $P_1(t)$  în intervalul de timp  $1/\Delta\omega_a$  poate să varieze mult mai mult decât pe intervalul de timp al unui ciclu ( $1/\omega_a$ ). Ca rezultat

termenul  $\frac{d^2 P_1(t)}{dt^2}$  poate fi neglijat față de  $2\omega_a \frac{dP_1(t)}{dt}$ , iar ecuația (2.1) devine:

$$(2.2a) \quad \frac{dP_1(t)}{dt} + \frac{\Delta\omega_a}{2} \frac{dP_1(t)}{dt} \cong \frac{K}{2\omega_a} E_1(t) \Delta n(t).$$

Aceste aproximări, cunoscute sub denumirea de *aproximația anvelopei lent-variabilă*, sunt mai puțin restrictive față de aproximația ecuațiilor cinetice, deci permit analiza interacțiunii cu semnale intense sau foarte rapide.

În aceleași condiții să analizăm ecuația ce guvernează evoluția diferenței de populație. Am stabilit că răspunsul tranzitoriu al acestei ecuații este determinat de timpul de relaxare  $T_1$ , (care este lent).

- prin urmare ca o a treia aproximatie, în partea dreaptă a ecuației (1.4) se va utiliza valoarea mediată a mărimii  $e(t) \frac{dP(t)}{dt}$ , medierea fiind efectuată

asupra câtorva cicluri ale mărimilor  $e(t)$  și  $P(t)$ . Această aproximatie nu ia în considerare factorii armonici, dar este permisă pentru variații rapide ale anvelopei semnalului  $e(t)$  sau polarizației  $P(t)$ . Ecuația evoluției populației devine:

$$(2.2b) \quad \frac{d[\Delta n(t)]}{dt} + \frac{\Delta n(t) - \Delta n_0}{T_1} \cong -\frac{1}{\hbar} E_1(t) P_1(t).$$

În această relație nu s-au considerat termenii complex-conjugați deoarece la rezonanță mărimea  $P_1(t)$  va fi reală.

## 2.1 Soluția în cazul semnalelor intense; frecvența Rabi

Considerăm un semnal cu amplitudine constantă  $E_1$ , aplicat brusc la momentul  $t = 0$ . Relațiile (2.2 a,b), care reprezintă baza analizei semnalelor foarte intense, formează o pereche de ecuații diferențiale de ordinul întâi, liniare și cuplate. Din cele două ecuații rezultă relația:

$$\frac{d^2 \Delta n(t)}{dt^2} + \left( \frac{\Delta\omega_a}{2} + \frac{1}{T_1} \right) \frac{d\Delta n(t)}{dt} + \left( \frac{\Delta\omega_a}{2T_1} + \frac{KE_1^2}{2\hbar\omega_a} \right) \Delta n(t) = \frac{\Delta\omega_a}{2T_1} \Delta n_0$$

Mărimea:

$$(2.3) \quad \frac{KE_1^2}{2\hbar\omega_a} = \frac{3^*}{8\pi^2} \frac{\gamma_r \epsilon \lambda^3}{\hbar} E_1^2 = \omega_R^2.$$

(are dimensiunile frecvenței la pătrat) se numește *frecvența Rabi* și depinde de valoarea intensității componente electrice a câmpului  $em$  precum și de tăria tranziției prin intermediul factorului  $\gamma_r$ . Folosind (2.3), relația devine:

$$(2.4a) \quad \left[ \frac{d^2}{dt^2} + \left( \frac{\Delta\omega_a}{2} + \frac{1}{T_1} \right) \frac{d}{dt} + \left( \frac{\Delta\omega_a}{2T_1} + \omega_R^2 \right) \right] \Delta n(t) = \frac{\Delta\omega_a}{2T_1} \Delta n_0.$$

De asemenea din ecuațiile (2.2 a,b) se poate obține și relația:

$$(2.4b) \quad \left[ \frac{d^2}{dt^2} + \left( \frac{\Delta\omega_a}{2} + \frac{1}{T_1} \right) \frac{d}{dt} + \left( \frac{\Delta\omega_a}{2T_1} + \omega_R^2 \right) \right] P_1(t) = \frac{KE_1}{2\omega_a T_1} \Delta n_0.$$

Pentru a analiza aceste ecuații, considerăm cazul în care sunt realizate următoarele alternative:

- ansamblul de sisteme atomice este supus acțiunii unui semnal  $E_1$  foarte intens,

- sau timpurile de relaxare ( $T_1$ , respectiv  $T_2$ ) ale sistemelor atomice sunt foarte mari, iar lăpimea spectrală a tranziției ( $\Delta\omega_a$ ) este foarte îngustă.

Dacă semnalul aplicat este foarte intens, atunci sunt realizate condițiile:

$$\omega_R \gg \Delta\omega_a, \text{ adică: } \omega_R \gg \frac{1}{T_1},$$

iar ecuațiile (2.4 a,b) iau forma:

$$(2.5) \quad \begin{aligned} \text{a)} \quad & \frac{d^2 \Delta n(t)}{dt^2} + \omega_R^2 \Delta n(t) \cong 0 \\ \text{b)} \quad & \frac{d^2 P_1(t)}{dt^2} + \omega_R^2 P_1(t) \cong 0 \end{aligned}$$

a căror soluție este:

$$(2.6) \quad \begin{aligned} a) \quad & \Delta n(t) = \Delta n_0 \cos \omega_R t \\ b) \quad & P_1(t) = \sqrt{\frac{K \hbar}{2\omega_a}} \Delta n_0 \sin \omega_R t = P_m \sin \omega_R t \end{aligned}$$

Evoluția în timp a diferenței de populație  $\Delta n(t)$  și anvelopa polarizației  $P_1(t)$  a ansamblului de sisteme atomice cărui i s-a aplicat un semnal intens sunt prezentate în fig. 74.

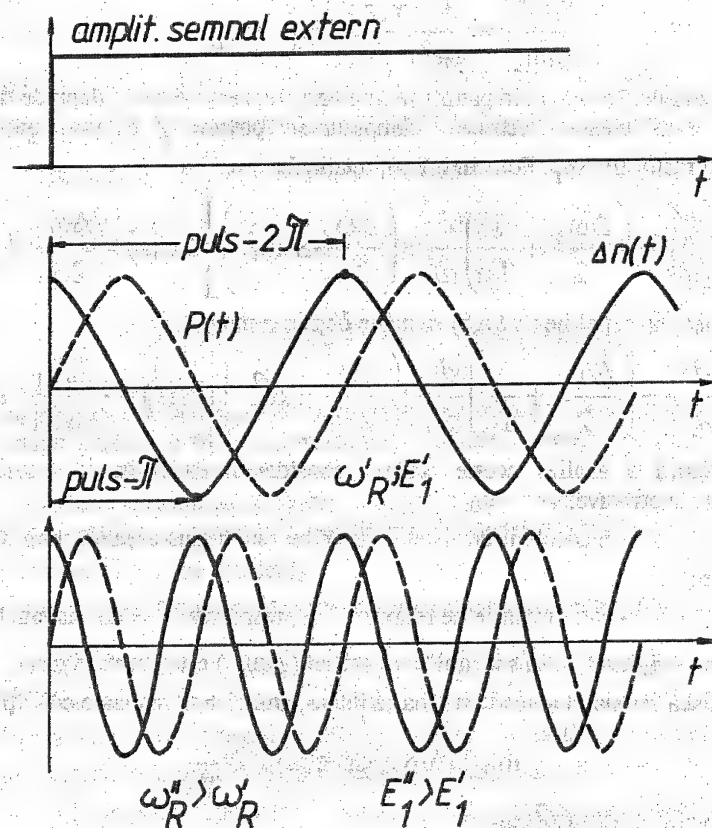


Fig. 74

Prin urmare comportarea ansamblului de sisteme atomice în cazul interacțiunii cu un semnal foarte intens este complet diferită de comportarea în cazul aproximației ecuațiilor cinetice. Valoarea diferenței de populație  $\Delta n(t)$  în loc să tindă exponențial spre valoarea de saturație  $\Delta n_{ss}$  (conform aproximației ecuației cinetice), ea oscilează

între valoarea inițială și una opusă acesteia, cu o frecvență egală cu frecvența Rabi. În același timp amplitudinea polarizației induse  $P_1(t)$  în loc să tindă, printr-un regim tranzitoriu cu constanta  $T_2$ , spre cuplare cu semnalul aplicat, ea urmărește variația sinusoidală a diferenței de populație  $\Delta n(t)$ , dar nu o ajunge niciodată deoarece între aceste mărimi periodic sinusoidale se păstrează mereu o defazare egală cu  $T_R/4$ .

Această comportare a mărimilor  $\Delta n(t)$  și  $P_1(t)$  este cunoscută sub denumirea de *fenomenul de basculare Rabi* (Rabi flopping behaviour). Fenomenul poate fi explicat atât în cadrul analizei clasice cât și a celei cuantice.

În aproximația semnalului foarte intens valoarea frecvenței Rabi este mare față de  $\Delta\omega_a \cong \frac{2}{T_2}$ , respectiv  $\frac{1}{T_1}$  dar mică față de frecvența câmpului  $\omega_R \ll \omega_a$ .

Prin urmare diferența densității populațiilor, în interval de timp  $T_1$  (sau  $T_2$ ), oscilează de mai multe ori cu frecvența  $\omega_R$ . Deoarece  $\omega_R \ll \omega_a$ , aproximația anvelopei lent variabile pentru  $\Delta n(t)$  și  $P_1(t)$  rămâne valabilă.

Din relația (2.6 a,b) reprezentată în fig. 74 rezultă că polarizația ansamblului este defazată cu  $\pi/2$  față de variația lui  $\Delta n(t)$ , prin urmare valoarea maximă a lui  $P_1(t)$  se atinge în momentul când  $\Delta n(t) = 0$ , ceea ce este în contradicție cu rezultatul obținut în aproximația ecuației cinetice, în care  $|\tilde{P}(\omega)|$  este direct

proporțional cu  $\Delta n(t)$ . Din punct de vedere fizic în această situație toți dipolii electrici oscilanți sunt aliniați în fază (intensitatea mecanismului de defazare este mică față de cea a semnalului aplicat). Din punct de vedere cuantic termenul cuantic oscilant  $|\tilde{C}_1|^2 |\tilde{C}_2^*|^2$  prezintă o valoare maximă:  $|\tilde{C}_1| = |\tilde{C}_2| = \sqrt{1/2}$ , unde probabilitățile

de prezență satisfac condiția:  $|\tilde{C}_1(t)|^2 + |\tilde{C}_2(t)|^2 = 1$ .

Vom urmări să stabilim ecuațiile diferențiale complete ale mărimilor  $\Delta n(t)$  și  $P_1(t)$ , presupunând că la momentul  $t = 0$  este aplicat un semnal de amplitudine arbitrară, dar constantă în timp. Pentru o durată mare a interacțiunii trebuie să acceptăm că diferența densității de populație tinde la o stare staționară. În acest caz soluția staționară a ecuației (2.4 a) este de forma:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Delta n(t) = \Delta n_{ss} \equiv \frac{\Delta n_0}{1 + 2 T_1 \frac{\omega_R^2}{\Delta \omega_a}}$$



relație asemănătoare cu (V 5.13). Din compararea cele două relații rezultă că și în cazul aproximației semnalului de intensitate mică probabilitatea tranziției forțate poate fi exprimată funcție de frecvența Rabi și lățimea tranziției prin expresia:

$$(2.7) \quad W_{12} = \frac{\omega_R^2}{\Delta\omega_a} = \frac{3^* \gamma_I \varepsilon \lambda^3}{8\pi^2 \hbar \Delta\omega_a} E_1^2.$$

Deoarece, ca rezultat al interacțiunii, există tendința evoluției spre o stare staționară trebuie să acceptăm existența amortizării fenomenului de basculare Rabi. Prin urmare, după parcurgerea mai multor cicluri Rabi, densitatea diferenței de populație tinde spre o valoare staționară descrisă de relația:

$$(2.8) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \Delta n(t) = \Delta n_{ss} = \frac{\Delta n_0}{1 + 2W_{12}T_1} = \frac{\Delta n_0}{1 + S},$$

unde "factorul de saturație" S, dat de relația:

$$S = 2W_{12}T_1 = 2T_1 \frac{\omega_R^2}{\Delta\omega_a} = \frac{I}{I_{sat}},$$

este proporțional cu puterea semnalului perturbator, care a fost considerată în limitele aproximației de semnal intens.

În continuare vom analiza soluția exactă, adică cea valabilă pentru orice valoare a semnalului perturbator. În acest scop se introduc variabile:

- scala timpului se normalizează față de parametrul  $T_2$ :  $t' = \frac{t}{T_2}$ ;

- amplitudinea normalată a semnalului:

$$R = \omega_R T_2 = \frac{2\omega_R}{\Delta\omega_a};$$

- raportul constantelor de timp:  $D = \frac{T_2}{T_1}$  (parametrul D va avea o

valoare foarte mică);

- densitatea normalată a populației:  $\hat{n} = \frac{\Delta n(t)}{\Delta n_0}$  și polarizația

$$\text{normalată: } \hat{p} = \frac{P_1}{P_0}, \text{ unde: } P_0 = \sqrt{\frac{\hbar K}{2\omega_a}} \Delta n_0.$$

Ecuatiile cuplate (2.2 a,b sau cele echivalente 2.4 a,b) devin:

$$(2.9) \quad \begin{aligned} \text{a)} \quad & \frac{d\hat{n}(t')}{dt'} + D[\hat{n}(t') - 1] = R\hat{p}(t') \\ \text{b)} \quad & \frac{d\hat{p}(t')}{dt'} + \hat{p}(t') = R\hat{n}(t') \end{aligned}$$

În continuare este prezentată schița de rezolvare a sistemului de ecuații (2.9 ab). Pentru rezolvare să analizăm sistemul de ecuații omogene:

$$(2.10) \quad \begin{aligned} \text{a)} \quad & \frac{dn_0(t')}{dt'} + Dn_0(t') + Rp_0(t') = 0 \\ \text{b)} \quad & \frac{dp_0(t')}{dt'} + \hat{p}_0(t') - Rn_0(t') = 0 \end{aligned}$$

ale cărui soluții le considerăm de forma:

$$(2.11 \text{ a}) \quad n_0 = A \exp(st')$$

$$(2.11 \text{ b}) \quad p_0 = B \exp(st'),$$

unde A, B și s sunt parametri ce urmează a fi determinați.

Soluțiile (2.11) introduse în setul (2.10 a,b) conduc la sistemul de ecuații:

$$(2.12) \quad \begin{aligned} \text{a)} \quad & (s + D)A + RB = 0 \\ \text{b)} \quad & -RA + (s + 1)B = 0 \end{aligned}$$

a cărui ecuație caracteristică este:

$$s^2 + (D + 1)s + DR^2 = 0,$$

$$\text{cu: } \Delta = (D + 1)^2 + 4(D + R^2) = \frac{4^2}{\Delta\omega_a^2} \left[ \left( \frac{\Delta\omega_a}{4} - \frac{1}{2T_1} \right)^2 - \omega_R^2 \right].$$

În rezolvarea problemei apar două cazuri extreme.

$$\text{Cazul } \Delta > 0: \quad \frac{\Delta\omega_a}{4} - \frac{1}{2T_1} > \omega_R.$$

În acest caz expresia parametrului s are forma:

$$\begin{aligned} s_{1,2} &= \frac{2}{\Delta\omega_a} \left\{ - \left( \frac{\Delta\omega_a}{4} - \frac{1}{2T_1} \right) \pm \left[ \left( \frac{\Delta\omega_a}{4} - \frac{1}{2T_1} \right)^2 - \omega_R^2 \right]^{\frac{1}{2}} \right\} = \\ &= T_2 (-\alpha \pm \beta) \end{aligned}$$

Dacă valorile  $s_{1,2}$  se introduc în una din ecuațiile sistemului (2.12), de ex. în (2.12 b), se obțin valorile  $(A_1, B_1)$  respectiv  $(A_2, B_2)$  ale parametrilor A, B.

$$-RA_1 + [T_2(-\alpha + \beta) + 1]B_1 = 0,$$

$$-RA_2 + [T_2(-\alpha - \beta) + 1]B_2 = 0,$$

de unde:

$$B_1 = R \frac{A_1}{T_2(-\alpha + \beta) + 1}, \quad B_2 = R \frac{A_2}{T_2(-\alpha - \beta) + 1}$$

Funcția totală ce descrie dependența de timp a mărimii  $n_0$  se exprimă ca o combinație liniară a funcțiilor (2.11 a sau b):

$$\begin{aligned} \hat{n}_0 &= A_1 \exp[T_2(-\alpha + \beta)t'] + A_2 \exp[T_2(-\alpha - \beta)t'] = \\ &= A_1 \exp[T_2(-\alpha + \beta)t] + A_2 \exp[T_2(-\alpha - \beta)t] \end{aligned}$$

(2.13 a, b)

$$\begin{aligned} \hat{p}_0 &= B_1 \exp[T_2(-\alpha + \beta)t'] + B_2 \exp[T_2(-\alpha - \beta)t'] = \\ &= R \left\{ \frac{A_1}{T_2(-\alpha + \beta) + 1} \exp[(-\alpha + \beta)t] + \frac{A_2}{T_2(-\alpha - \beta) + 1} \exp[(-\alpha - \beta)t] \right\} \end{aligned}$$

Cazul  $\Delta < 0$ :

$$\frac{\Delta \omega_a}{4} - \frac{1}{2T_1} \langle \omega_R, \rangle$$

$$s_{1,2} = T_2(-\alpha \pm i\beta)$$

Dacă această expresie se introduce în ecuația (2.12 b) și se separă termenii după funcțiile  $\sin$  și  $\cos$  se obține:

$$-B_1 T_2 \beta - T_2 B_2 \alpha + B_2 - RA_2 = 0,$$

$$-B_2 T_2 \beta - T_2 B_1 \alpha + B_1 - RA_1 = 0.$$

De unde:

$$B_1 = \frac{\beta RA_2 T_2 - (1 - \alpha T_2) RA_1}{-\beta^2 - T_2^2 - (1 - \alpha T_2)^2},$$

$$B_2 = \frac{\beta RA_1 T_2 - (1 - \alpha T_2) RA_2}{-\beta^2 - T_2^2 - (1 - \alpha T_2)^2}$$

Prin urmare expresia mărimilor  $n_0$  și  $p_0$  devine:

$$(2.14 a) \quad n_0 = (A_1 \cos \beta t + A_2 \sin \beta t) e^{-\alpha t},$$

$$(2.14 b) \quad \begin{aligned} p_0 &= \frac{1}{-\beta^2 - T_2^2 - (1 - \alpha T_2)^2} \times \\ &\times \{ \beta RA_2 T_2 - (1 - \alpha T_2) RA_1 \} \cos \beta t + \\ &+ \{ \beta RA_1 T_2 - (1 - \alpha T_2) RA_2 \} \sin \beta t \} e^{-\alpha t} \end{aligned}$$

În continuare considerăm ecuația neomogenă. Presupunem  $n'_0 = C_1$  și  $p'_0 = C_2$  (unde  $C_1, C_2$  sunt mărimi constante). Introduse în ecuația neomogenă (2.9 a, b) se obțin relațiile care permit exprimarea constantelor  $C_1, C_2$  prin intermediul parametrilor sistemului:

$$D(C_1 - 1) = RC_2, \text{ de unde: } C_1 = \frac{D}{D + R^2}$$

$$C_2 = RC_1 \quad C_2 = \frac{RD}{D + R^2}$$

Pentru a determina valoarea constantelor  $A_1$  și  $A_2$  trebuie fixate condițiile inițiale ale fenomenului descris de setul de ecuații (2.9 a, b):

$$\Delta n(0) = \Delta n_0 \quad n_0(0) = 1$$

Condiții inițiale:

$$p_1(0) = 0 \quad p_0(0) = 0$$

Soluțiile generale în cazul 1 sunt de forma:

$$(2.15 a) \quad \hat{n}(t) = A_1 \exp[(-\alpha + \beta)t] + A_2 \exp[(-\alpha - \beta)t] + C_1,$$

$$(2.15 b) \quad \begin{aligned} \hat{p}(t) &= R \left\{ \frac{A_1}{T_2(-\alpha + \beta) + 1} \exp[(-\alpha + \beta)t] + \right. \\ &+ \left. \frac{A_2}{T_2(-\alpha - \beta) + 1} \exp[(-\alpha - \beta)t] \right\} + C_2 \end{aligned}$$

care la momentul inițial  $t = 0$  devin:

$$\hat{n}(0) = A_1 + A_2 + C_1 = 1,$$

$$\hat{p}(0) = R \left[ \frac{A_1}{T_2(-\alpha + \beta) + 1} + \frac{A_2}{T_2(-\alpha - \beta) + 1} \right] + C_2,$$

relații ce permit calculul mărimilor  $A_1$  și  $A_2$ .

În cazul 2 soluțiile generale au forma:

$$(2.16 a) \quad \hat{n}(t) = (A_1 \cos \beta t + A_2 \sin \beta t) e^{-\alpha t} + C_1,$$

$$(2.16 \text{ b}) \quad \hat{p}(t) = \frac{1}{-\beta^2 - T_2^2 - (1 - \alpha T_2)^2} \times \\ \times \{ \beta R A_2 T_2 - (1 - \alpha T_2) R A_1 \} \cos \beta t + \\ + \{ -\beta R A_1 T_2 - (1 - \alpha T_2) R A_2 \} \sin \beta t \} e^{-\alpha t} + C_2$$

care la momentul inițial devin:

$$\hat{n}(0) = A_1 + C_1 = 1,$$

$$\hat{p}(0) = \frac{1}{-\beta^2 - T_2^2 - (1 - \alpha T_2)^2} \{ \beta R A_2 T_2 - (1 - \alpha T_2) R A_1 \} + C_2,$$

relații ce permit calculul mărimilor  $A_1$  și  $A_2$ :

$$A_1 = 1 - C_1,$$

$$A_2 = \frac{[\beta^2 T_2^2 + (1 - \alpha T_2)^2] C_2 - [(\alpha T_2 - 1) R] (1 - C_1)}{\beta T_2 R}$$

S-a obținut un sistem de ecuații liniare cuplate ale căror soluții prezintă o comportare tranzitorie sub forma unei superamortizări sau sub formă oscilatorie, funcție de valoarea raportului:

$$\frac{2R}{1-D} = \frac{\omega_R}{\frac{\Delta\omega_a}{4} - \frac{1}{2T_1}}$$

Să analizăm cazurile extreme.

1 - Regimul de superamortizare sau cel al semnalelor de intensitate mică. Considerăm un semnal a cărui mărime a intensității componente electrice a câmpului *em* este mică astfel încât îndeplinește condiția:

$$\omega_R < \frac{\Delta\omega_a}{4} - \frac{1}{2T_1}$$

Aceasta înseamnă că frecvența Rabi (sau câmpul electric) este mică față de lățimea tranziției (prin urmare și probabilitatea tranziției stimulate  $W_{12}$  este mică față de  $\Delta\omega_a$ ). Soluția exactă va fi superamortizată și se va exprima prin două amortizări exponențiale de forma:

$$-\alpha \pm \beta = -\left(\frac{\Delta\omega_a}{4} - \frac{1}{2T_1}\right) \pm \left[\left(\frac{\Delta\omega_a}{4} - \frac{1}{2T_1}\right)^2 - \omega_R^2\right]^{1/2},$$

unde  $\alpha < \beta$ . Această condiție, la limită, tinde la ecuația ratelor. Dacă presupunem că la momentul inițial (când se aplică câmpul *em*) sistemul atomic este în repaus ( $P_1(0) = 0$  și  $\Delta n(0) = \Delta n_0$ ), soluția va fi de forma:

$$\Delta n(t) = \Delta n_{\text{sat}} \left[ 1 + S e^{-\alpha t} \left( \cosh \beta t + \frac{\alpha}{\beta} \sinh \beta t \right) \right],$$

unde mărimile  $\Delta n_{\text{ss}}$  și  $S$  au fost definite mai sus. În cazul semnalului slab

( $\omega_R \ll \Delta\omega_a$ ) și al amortizării radiative lente a energiei  $\frac{1}{T_1} \ll \Delta\omega_a$  cele două constante de timp tind la valoarea:

$$\alpha = \frac{\Delta\omega_a}{4} - \frac{1}{2T_1} \rightarrow \frac{\Delta\omega_a}{4};$$

$$\frac{\Delta\omega_a}{4} \beta = \left[ \left( \frac{\Delta\omega_a}{4} + \frac{1}{2T_1} \right)^2 - \omega_R^2 \right]^{1/2} \approx \\ \approx \frac{\Delta\omega_a}{4} \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{16\omega_R^2}{\Delta\omega_a^2} \right) = \frac{\Delta\omega_a}{4} - 2W_{12}$$

deci:

$$\alpha + \beta \approx \frac{\Delta\omega_a}{4}, \text{ respectiv:}$$

$$\alpha - \beta = \frac{\Delta\omega_a}{4} + \frac{1}{T_1} - \frac{\Delta\omega_a}{4} - 2W_{12} = 2W_{12} + \frac{1}{T_1}.$$

Prin urmare la limită ecuația poate fi aproximată prin:

$$\Delta n(t) \approx \Delta n_{\text{ss}} \left\{ 1 + S \exp \left[ - \left( 2W_{12} + \frac{1}{T_1} \right) t \right] \right\},$$

care reprezintă relația (V 5.15) obținută în cazul regimului tranzitoriu al ansamblului de sisteme cuantice cu două niveluri energetice. Prin urmare, în cazul semnalelor slabe, comportarea de tip Rabi tinde lent la comportarea ecuațiilor ratelor sub semnal slab.

2 - Regimul semnalelor intense. Pentru semnale intense este îndeplinită condiția:

$$\omega_R > \frac{\Delta\omega_a}{4} - \frac{1}{2T_1},$$

ecuația nu este amortizată, adică apare o pereche de constante complex-conjugate:



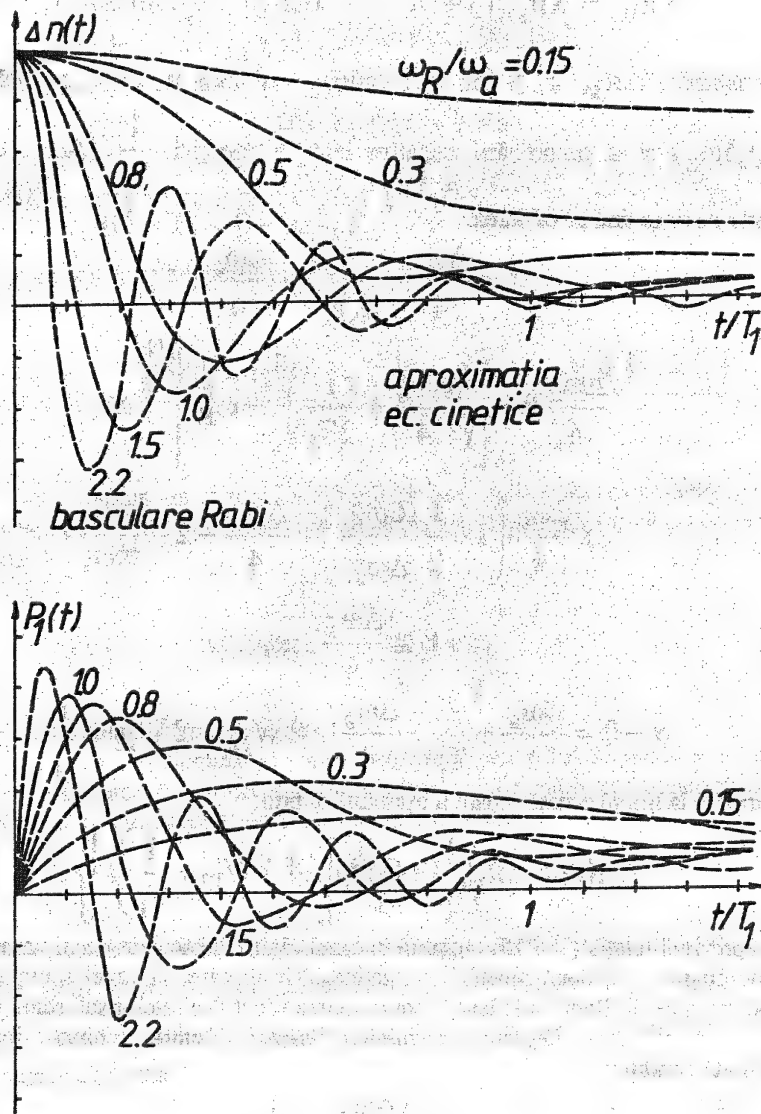


Fig. 75

$$-\alpha \pm i\beta = -\left(\frac{\Delta\omega_a}{4} - \frac{1}{2T_1}\right) \pm i\left[\omega_R^2 - \left(\frac{\Delta\omega_a}{4} - \frac{1}{2T_1}\right)^2\right]^{1/2}$$

Partea imaginară a acestei expresii reprezintă o frecvență de tip Rabi modificată:

$$(2.17) \quad \omega'_R \equiv \sqrt{\omega_R^2 - \left(\frac{\Delta\omega_a}{4} - \frac{1}{2T_1}\right)^2},$$

care include efectele amortizării și cele ale defazării.

În acest caz, pentru aceleași condiții inițiale, dependența de timp a diferenței densității de populație este:

$$\Delta n(t) \approx \Delta n_{ss} \left\{ 1 + S e^{-\alpha t} \left( \cos \beta t + \frac{\alpha}{\beta} \sin \beta t \right) \right\}.$$

Rezultatele (2.2 a,b sau 2.4 a,b) sunt reprezentate în fig. 45 a,b funcție de  $\frac{t}{T_1}$

pentru frecvențe Rabi variind în intervalul  $(0,15 \div 2,2)$  din lățimea spectrală. Aceste valori acoperă domeniul de la regimul de semnal slab, la care se supun ecuațiile cinetice, până la domeniul regimului de semnal intens, când se manifestă fenomenul de basculare Rabi. Între aceste extreme densitatea diferenței de populație oscilează cu frecvența Rabi  $\omega'_R < \omega_R$ . Fenomenul de basculare Rabi se amortizează pe măsură ce efectele de defazare descrise de  $\Delta\omega_a$ , în decursul regimului tranzitoriu, distrug mișcarea coerentă.

Fenomenul de basculare Rabi este un fenomen cuantic care reiese din ecuația Schrödinger aplicată unui sistem cuantic cu două niveluri perturbat de un câmp *em* relativ intens. Chiar și în cazul regimului semnalelor slabe, în care nu se manifestă fenomenul de basculare Rabi, frecvența  $\omega_R$  reprezintă o măsură naturală a intensității câmpului electric aplicat tranziției de frecvență  $\omega_a$ . Mărimea  $\hbar\omega_R$  reprezintă o măsură a hamiltonianului perturbației determinată de câmpul *em* aplicat sistemului cuantic, după cum  $\hbar\Delta\omega_a$  reprezintă o măsură a hamiltonianului perturbației întâmplătoare determinată de mecanismele de relaxare, de cele de defazare sau de lărgire fononică ce acționează asupra sistemului cuantic, iar  $\hbar\omega_a$  este o măsură a hamiltonianului neperturbat (static) al sistemului cuantic.

Considerând relația ( $W_{12} = \omega_R^2 / \Delta\omega_a$ ), condiția aproximației pentru ecuațiile cinetice ( $W_{12} \ll \Delta\omega_a$ ) trece în condiția:

$$\omega_R \ll \Delta\omega_a.$$

adică pentru a ne situa în aceste condiții frecvența Rabi trebuie să fie mică față de lățimea tranziției  $\Delta\omega_a$ .

Din punct de vedere fizic comportarea descrisă de ecuația cinetică se manifestă atunci când intensitatea semnalului aplicat (deci și frecvența Rabi) este atât de mică încât fenomenul de defazare sau cele de relaxare apar în mod sigur și distrug comportarea sub formă de basculare Rabi înainte de a se completa un ciclu Rabi. Efectele coerente sau de semnal intens apar, pe de altă parte, atunci când atomii pot fi "dirijați" pe mai multe cicluri Rabi într-un interval de timp scurt față de timpurile de relaxare  $T_1$  sau  $T_2$ .

### 3. Efectele pulsurilor coerente

Fenomenele de tipul basculării Rabi se pot observa folosind semnale-puls foarte scurte și metode de detecție tranzitorie. Aceasta, pe de o parte, deoarece este mai simplu să se obțină semnale sub formă de puls, iar pe de altă parte deoarece bascularea Rabi se evidențiază mai clar în regim tranzitoriu decât în regim staționar. Din această cauză s-au efectuat experiențe cu "pulsuri coerente".

Din analiza fenomenelor de basculare Rabi rezultă că dacă un puls suficient de intens cu o durată  $T_p$ , astfel încât  $\omega_R T_p = \pi$ , se aplică unui ansamblu de sisteme cuantice cu două niveluri energetice, sistemele populând nivelul energetic inferior (ansamblu absorbant), acesta poate "bascula" toată populația nivelului energetic inferior pe cel superior rezultând la sfârșitul pulsului un ansamblu de sisteme cuantice complet inversat, deci un mediu amplificator ( $-\Delta n_0$ ). Acestea sunt cunoscute sub denumirea de experiențe cu "pulsuri- $\pi$ " (Fig. 74). Se observă că există o corelație între amplitudinea pulsului  $E_1$  și durata lui  $T_p$  pentru a obține un "puls- $\pi$ ". În această situație după trecerea pulsului populația este inversată și începe procesul de amortizare spre starea de echilibru cu rata  $T_1$ .

Un puls pentru care  $\omega_R T_p = 2\pi$  ("puls- $2\pi$ " sau cu "aria" egală cu  $2\pi$ ) în prima parte va crea inversia de populație, după care populația va fi "basculată" în starea inițială (fig. 74). Acest tip de puls nu transferă energie ansamblului de sisteme cuantice. Un puls cu o asemenea "arie" se propagă neatenuat prin ansamblul de sisteme cuantice, care, în mod obișnuit, pentru semnale de intensitate mică, este absorbant sau chiar opac. Fenomenul, evidențiat experimental, este cunoscut sub denumirea de "transparență auto-indusă".

Pentru a analiza această comportare este necesar să se considere atât acțiunea pulsului asupra densității diferenței de populație cât și răspunsul ansamblului de sisteme cuantice (prin polarizarea acestuia) la această acțiune. În prima jumătate (" $\pi$ ") a duratei pulsului- $2\pi$  are loc un proces de transfer de energie de la puls la sistemele cuantice ale ansamblului, realizându-se inversia de populație. În partea a doua, ansamblul de sisteme cuantice "aliniat coerent" transferă semnalului energie prin radiație optică. Procesul de "pendulare" a energiei între puls și ansamblul de sisteme cuantice este însoțit de

modificări ale formei pulsului după interacțiune față de cel inițial. În timpul propagării viteza de propagare a pulsului prin ansamblul de sisteme este mai mică decât a câmpului  $em$ . De asemenea, în timpul propagării prin ansamblu, energia pulsului, față de cea a pulsului liber, este înmagazinată pentru un interval de timp în sistemele cuantice și nu în undă.

În cele prezentate s-a considerat propagarea semnalului intens printr-un ansamblu de sisteme cuantice cu două niveluri energetice. În cazul real al propagării prin ansamblul de sisteme cuantice *multinivel* apar fenomene noi.

De ex. să considerăm că prin ansamblul de sisteme cuantice *multinivel* se propagă un semnal de intensitate mare a cărui frecvență este în rezonanță cu frecvența tranziției  $i \Leftrightarrow m$  și un semnal de intensitate mică a cărui frecvență este la rezonanță cu tranziția  $m \Leftrightarrow j$ . Într-o descriere simplificată semnalul intens va modula cu frecvența Rabi ( $\omega'_R$ ) populațiile  $n_i(t)$  și  $n_m(t)$  implicate în tranziție, modulare care se va manifesta în interacțiunea fascicului slab cu tranziția  $m \Leftrightarrow j$ , prin intermediul populației nivelului comun. Deci semnalul intens produce o modulare a semnalului slab.

Tratarea cuantică a efectelor de amestec al frecvențelor și de intermodulare implică utilizarea formalismului "matricii de densitate".

## Cap. IX

### REZONATORI OPTICI

În prg. VI 4 s-a stabilit că amplificarea în domeniul optic a unui semnal *em* are loc la propagarea acestuia prin *mediul activ*, adică printr-un ansamblu de sisteme cuantice identice în care a fost realizată inversia de populație. Amplificarea este determinată de faptul că, în unitate de timp, numărul proceselor de emisie stimulată este mai mare decât cel al proceselor de absorbție. Ambele procese, care sunt rezultatul interacțiunii radiației *em* cu substanța, au loc dacă frecvența semnalului coincide sau se află în apropierea frecvenței tranziției între două stări energetice ale sistemelor cuantice care formează ansamblul (mediul material).

Prin urmare pentru a realiza un dispozitiv fizic care să emită radiație optică pe baza fenomenelor forțate este necesar să se creeze mediul activ folosind energia dată de o sursă de pompaj, iar acesta trebuie să se afle într-un câmp de radiație a cărui frecvență să fie în rezonanță cu frecvența tranziției potențiale-laser a sistemelor cuantice ce formează ansamblul (mediul activ).

De aceea în continuare se analizează posibilitatea realizării unei cavități în care să se poată menține pentru un interval de timp cât mai mare o densitate de câmp de radiație *em*, distribuția spațială în cavitate a acestei densități, precum și cauzele care determină pierderea de radiație din cavitate. Cavitatea în care se introduce mediul activ poartă denumirea de *rezonator optic*.

Un rezonator optic, la fel ca și un rezonator din domeniul microundelor, trebuie să îndeplinească următoarele cerințe:

- volumul lui să fie suficient de mare pentru a putea conține o cantitate suficientă de material activ care să asigure oscilatorului optic o putere la ieșire suficient de mare;
- să permită amplificarea sau generarea de semnale într-o bandă de frecvență cât mai îngustă.

În domeniul optic aceste cerințe nu pot fi îndeplinite de către *rezonatorii convenționali închiși*, cunoscuți în domeniul microundelor. Pentru a obține, într-o bandă dată de frecvențe, o singură rezonanță între câmpul *em* și cavitatea rezonantă, dimensiunile cavității trebuie să fie de același ordin de mărime ca și cel al lungimii de undă a radiației emise, adică rezonatorul să fie *monomodal*. În domeniul optic, din punct de vedere tehnic această condiție este aproape irealizabilă. În plus rezonatorul ar prezenta un volum foarte mic, ceea ce nu satisface prima condiție.

Problema rezonatorilor optici a fost analizată de către Schawlow și Townes, Prohorov și Dicke, care au indicat posibilitatea utilizării în domeniul frecvențelor optice a *rezonatorilor deschiși*.

### 1. Optica matricială

Propagarea radiației optice în spațiul liber sau prin diferite sisteme optice poate fi urmărită folosind noțiunile de rază de radiație optică, fascicul de radiație optică, precum și legile refracției și cele ale reflexiei acestor raze la suprafața de separație a două medii optice.

În orice punct al spațiului unde este prezent câmpul de radiație optică se poate defini raza de radiație optică ca fiind o direcție normală la frontul de undă în acel punct. Direcția razei reprezintă direcția de propagare a energiei. Folosind acest model de descriere a propagării câmpului se neglijează fenomenul de difracție, precum și cel de polarizare.

În cele ce urmează modelul razei de radiație optică va fi aplicat în cazul fasciculelor paraxiale. O analiză mai puțin restrictivă este prezentată în diferite monografii, de ex. - V. Pop, "*Bazele opticii*", Ed. Universității "Al. I. Cuza" - Iași.

Dintr-un fascicul de radiație optică, care se propagă în direcția *z*, se consideră o rază (se poate considera și o particulă, de ex. un electron) într-un punct al spațiului ocupat de acesta. Raza se poate defini dacă se cunoaște coordonatele unui punct prin care trece, precum și înclinarea (panta) față de direcția *z* de propagare. Deoarece fasciculul paraxial prezintă o simetrie cilindrică se poate urmări propagarea razei numai într-un plan care conține direcția de propagare. În acest plan este necesar să se cunoască distanța punctului față de axa *z* [*r(z)*] și panta razei față de direcția de propagare

$\left[ \frac{dr(z)}{dz} \right]$ . Rezultatele pot fi mult simplificate dacă în definiția pantei razei se introduce și indicele de refracție local:

$$(1.1) \quad r'(z) = n(z) \frac{dr(z)}{dz}$$

Să analizăm, de ex. propagarea în spațiul liber a unei raze între două puncte situate în planele  $z_1 = ct$ , respectiv  $z_2 = z_1 + L = ct$  (fig. 76). În planul  $z_1$  raza

poate fi definită prin distanța  $r_1(z_1)$  și panta dreptei  $\frac{dr_1(z_1)}{dz}$ , elemente ce pot forma



o matrice-coloană. Raza intersectează planul  $z_2 = ct$  în punctul  $r_2(z_2)$ , dar pe intervalul de propagare nu-și modifică panta. Se observă că există relațiile:

$$(1.2 a) \quad r_2(z_2) = r_1(z_1) + L \frac{dr_1(z_1)}{dz}$$

$$(1.2 b) \quad \frac{dr_2(z_2)}{dz} = 0 + \frac{dr_1(z_1)}{dz},$$

relații ce pot fi scrise sub forma matricială:

$$(1.3) \quad \begin{bmatrix} r_2 \\ r'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ r'_1 \end{bmatrix}.$$

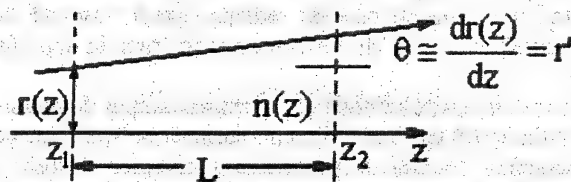


Fig. 76

Din această relație rezultă că fiecare sistem optic poate fi caracterizat printr-o matrice caracteristică, cunoscută sub denumirea de *matrice de transfer*, ale cărei elemente se exprimă funcție de parametrii acestuia. Matricea acționează asupra parametrilor care definesc raza prezentă la intrarea sistemului - *semnal intrare* - și îi transferă la ieșirea acestuia sub forma parametrilor - *semnal ieșire*, ceea ce permite reconstituirea razei după ce a traversat sistemul optic.

Dacă  $A, B, C, D$  reprezintă elementele matricii de transfer a sistemului optic atunci se poate scrie relația generală:

$$(1.4) \quad \begin{bmatrix} r_2 \\ r'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ r'_1 \end{bmatrix},$$

unde valoarea elementelor de transfer satisface condiția:

$$(1.5) \quad AD - BC = 1$$

(determinantul atașat matricii este unitar).

## 2. Fascicule paraxiale de radiație optică

### 2.1 Ecuația de undă paraxială

Pentru a realiza analiza detaliată a propagării fascicului de radiație optică în interiorul rezonatorului optic, precum și a celui transmis în afara acestuia trebuie considerată natura ondulatorie a radiației optice. Evoluția componentei electrice a câmpului *em* în spațiul liber (sau într-un mediu uniform și izotrop) este descrisă de ecuația de undă:

$$(2.1) \quad \nabla^2 e(x, y, z, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 e(x, y, z, t)}{\partial t^2} = 0.$$

(În loc de ecuația de undă vectorială va fi folosită cea scalară, deoarece în cele ce urmează vor fi considerate numai efectele de interferență și difracție; ecuația de undă vectorială furnizează informații despre starea de polarizare a câmpului, dar pentru moment acestea nu sunt necesare).

Fasciculele de radiație laser sunt suficient de colimate (se propagă în apropierea axului optic al rezonatorului), de aceea proprietățile lor de interferență și difracție, în cadrul teoriei scalare, pot fi descrise folosind aproximația unei paraxiale. În continuare este stabilită expresia ecuației de undă paraxială.

Dacă se acceptă drept soluție a ecuației (2.1) un câmp de forma:

$$(2.2) \quad e(x, y, z, t) = \tilde{E}(x, y, z) e^{-i\omega t},$$

atunci ecuația (2.1) conduce la ecuația Helmholtz:

$$(2.3) \quad [\nabla^2 + k^2] \tilde{E}(x, y, z) = 0, \text{ unde: } k^2 = \omega^2/c^2.$$

a) O soluție a acestei ecuații este de forma:

$$(2.4) \quad \tilde{E}(x, y, z) = E_0 e^{-ik \cdot r}.$$

Dacă  $E_0$  este o mărime constantă,  $k$  - vectorul de undă, iar  $r$  distanța dintre sursa generatoare de câmp (care poate fi dispusă în originea sistemului de referință) și punctul unde se determină fazorul câmpului, atunci soluția (2.4) descrie fazorul unei unde plane. Aceasta, într-un plan perpendicular la direcția de propagare  $k$ , prezintă aceeași valoare a fazorului, adică valoarea amplitudinii  $E_0$ , respectiv a fazei  $(k \cdot r)$

sunt constante. Dacă direcția de propagare este  $z$ , atunci mărimea  $E_0 e^{-ikz}$  este constantă în orice plan perpendicular la această direcție. Mărimea  $\exp(-ikz)$  exprimă faptul că fazorul câmpului prezintă o variație importantă pe un interval egal cu lungimea de undă a radiației.

b) O altă soluție a ecuației (2.3), valabilă pentru toate valorile  $r \neq 0$ , este de forma:

$$(2.5) \quad \tilde{E}(x, y, z) = \frac{E_0}{R} e^{-ik \cdot R}.$$

Această soluție prezintă o valoare constantă pe o suprafață sferică (caracterizată prin raza de curbură  $R$ ) centrată în origine (undă sferică). Undele sunt generate de o sursă

punctiformă plasată în origine, iar intensitatea energetică (proporțională cu  $|E(x, y, z)|^2$ ) se micșorează cu distanța conform legii  $\frac{1}{R^2}$ .

Să analizăm soluția (2.5) într-un plan  $(x, y)$ , perpendicular la direcția de propagare  $z$ , în punctul  $z = R$  (planul este tangent la unda sferică în "polul undei"). În acest plan (fig. 77) se poate scrie:

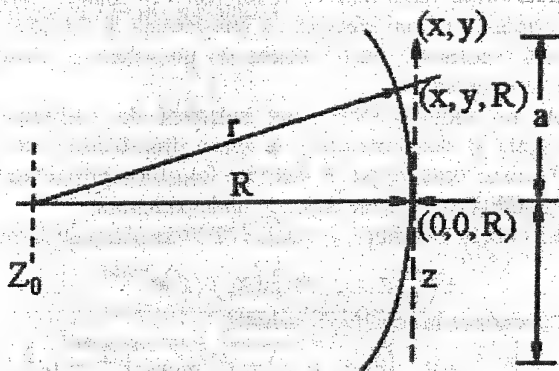


Fig. 77

$$(2.6) \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + R^2} = R \sqrt{1 + \frac{x^2 + y^2}{R^2}}$$

Dacă analiza este limitată la o suprafață de arie mică centrată în jurul "polului" undei (este îndeplinită condiția:  $x^2 + y^2 \ll R^2$ ), atunci relația (2.6) poate fi dezvoltată în serie, cu limitare la aproximarea de ordinul doi, iar expresia fazei devine:

$$kr \cong kR + \frac{k(x^2 + y^2)}{2R}$$

În aceste condiții, expresia câmpului în planul  $(x, y)$  este:

$$(2.7) \quad \tilde{E}(x, y, z) = \frac{E_0}{r} e^{-ikR} e^{-i \frac{k(x^2 + y^2)}{2R}}$$

La numitorul relației (2.7) se poate aproxima  $r \cong R$ , dar în argumentul funcției exponențiale această aproximare nu se poate face, deoarece valoarea acesteia este de ordinul lungimii de undă. Câmpul descris de relația (2.7) reprezintă o aproximare foarte bună a undei sferice, dacă în planul  $(x, y)$  extensia maximă ( $a$ ) în jurul "polului" undei este suficient de mică. Aproximația presupune că pot fi neglijate termenii pătratici

și de ordin superior din dezvoltare, contribuția lor la exponentul complex fiind mică față de variația maximă  $\left(\frac{\pi}{2}\right)$  a acestuia:

$$\left| \frac{2\pi(2a)}{\lambda 4R^3} \right| \ll \frac{\pi}{2}, \text{ de unde: } \frac{a^2}{\lambda R} \ll \frac{R^2}{(2a)^2},$$

condiție ce este îndeplinită de fasciculele paraxiale.

Prin urmare dacă într-un plan perpendicular la direcția de propagare, în condițiile de paraxialitate, variația fazei câmpului este exprimată prin forma (2.7) atunci frontul de undă al câmpului considerat este de formă sferică.

c) Să considerăm un fascicul oarecare de radiație optică, care se propagă de-a lungul direcției  $z$  (acesta nu reprezintă un fascicul de raze paralele) și un plan  $(x, y)$  perpendicular la această direcție. De-a lungul direcției de propagare fazorul componente electrice prezintă o variație rapidă pe o distanță egală cu cea a unei lungimi de undă, exprimată prin funcția  $\exp(-ikz)$ , caracteristică unei unde plane. În planul  $(x, y)$ , valoarea fazorului depinde atât de poziția  $z$  a acestuia, cât și de coordonatele  $(x, y)$  în care se calculează; dependența fazorului de distanța de propagare  $z$ , determinată de fenomenele legate de procesul de propagare și de cel de difracție, este lentă atât față de variația funcției  $\exp(-ikz)$  cât și față de cea determinată de dependența de coordonatele de poziție  $(x, y)$ . Dependența de coordonate exprimă distribuția intensității energetice în planul  $(x, y)$  (fig. 78 a, b).

Pentru a evidenția această compoziție, fazorul câmpului se scrie sub forma:

$$(2.8) \quad \tilde{E}(x, y, z) = \tilde{u}(x, y, z) e^{-ikz},$$

unde  $\tilde{u}(x, y, z)$  reprezintă amplitudinea complexă a unei unde scalare complexe, care, în planul  $(x, y)$ , descrie forma profilului fascicului.

Introducând forma (2.8) în ecuația (2.3) se obține:

$$(2.9) \quad \frac{\partial^2 \tilde{u}(x, y, z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}(x, y, z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}(x, y, z)}{\partial z^2} - 2ik \frac{\partial \tilde{u}(x, y, z)}{\partial z} = 0.$$

Conform celor prezentate mai sus dependența de parametrul de propagare  $z$  a mărimii  $\tilde{u}(x, y, z)$  este determinată de efectul de difracție; mărimea acestei variații este mai mică decât mărimea variației funcției  $\tilde{u}(x, y, z)$  în planul  $(x, y)$ . Variația lentă a mărimii  $\tilde{u}(x, y, z)$  funcție de  $z$  poate fi exprimată prin aproximarea paraxială:

$$(2.10) \quad \left| \frac{\partial^2 \tilde{u}(x, y, z)}{\partial z^2} \right| \ll \left| 2k \frac{\partial \tilde{u}(x, y, z)}{\partial z} \right|, \left| \frac{\partial^2 \tilde{u}(x, y, z)}{\partial x^2} \right|, \left| \frac{\partial^2 \tilde{u}(x, y, z)}{\partial y^2} \right|$$

În aceste condiții, ecuația (2.9) devine:

$$(2.11 a) \quad \frac{\partial^2 \tilde{u}(x, y, z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}(x, y, z)}{\partial y^2} - 2ik \frac{\partial \tilde{u}(x, y, z)}{\partial z} = 0, \text{ sau:}$$

$$(2.11 b) \quad \nabla_T^2 \tilde{u}(x, y, z) - 2ik \frac{\partial \tilde{u}(x, y, z)}{\partial z} = 0.$$

(Operatorul  $\nabla_T^2$  - nabra transversal - acționează asupra coordonatelor carteziene sau cilindrice în planul perpendicular la direcția de propagare).

Din relația (2.11 b) rezultă:

$$\frac{\partial \tilde{u}(x, y, z)}{\partial z} = -\frac{i}{2k} \nabla_T^2 \tilde{u}(x, y, z),$$

care poate fi integrată numeric folosind "aproximația diferențelor finite"; se evaluează derivatele în planul  $(x, y)$  aflat în poziția  $z$ , după care se efectuează un pas în poziția  $z + \Delta z$ , unde se rezolvă din nou pe baza rezultatelor din planul  $z$ .

Să analizăm condițiile limită de valabilitate a acestei aproximații. Un fascicul de raze optice poate fi considerat ca o superpoziție de unde plane care se propagă sub diferite unghiuri față de axa  $z$ . Să considerăm fazorul  $\tilde{E}(x, z)$  al unei componente care se propagă în planul  $(x, z)$  sub unghiul  $\theta$  față de axa  $z$ . În acest plan variația transversală și axială poate fi exprimată sub forma:

$$\tilde{E}(x, z) = e^{-ik \cdot r} = e^{i(-x k \cos \theta - z k \sin \theta)} = \tilde{u}(x, z) e^{-ikz},$$

unde s-a folosit exprimarea sub forma (2.8). Din această identitate rezultă:

$$\tilde{u}(x, z) = e^{[-ix k \sin \theta + iz k (1 - \cos \theta)]} \cong \exp \left[ -ix k \theta + iz k \frac{\theta^2}{2} \right].$$

Folosind această relație, pot fi calculate mărimile:

$$-i \frac{2k}{\tilde{u}(x, z)} \frac{\partial \tilde{u}(x, z)}{\partial z} \cong k^2 \theta^2, \quad \frac{1}{\tilde{u}(x, z)} \frac{\partial^2 \tilde{u}(x, z)}{\partial x^2} \cong -k^2 \theta^2,$$

$$\frac{1}{\tilde{u}(x, z)} \frac{\partial^2 \tilde{u}(x, z)}{\partial z^2} \cong -\frac{k^2 \theta^4}{4}.$$

de unde rezultă că variația de ordinul doi față de  $z$  a mărimii  $\tilde{u}(x, z)$  este mai mică decât termenii precedenți cu mărimea  $\theta^2/4$  (unghiul  $\theta$  exprimat în radiani); această mărime este mult mai mică decât unu, dacă  $\theta \leq 0.5 \text{ rad}$  ( $\theta \leq 30^\circ$ ).

Prin urmare dacă direcția de propagare a componentelor sub formă de unde plane formează cu axa optică un unghi  $\theta \leq 30^\circ$ , atunci mărimea  $\frac{\partial^2 \tilde{u}(x, z)}{\partial z^2}$ , în conformitate cu aproximația paraxială, va fi cel puțin cu un ordin de mărime mai mică decât ceilalți doi termeni.

## 2.2 Integrala lui Huygens.

Un mod de a analiza propagarea unei paraxiale constă în a utiliza principiul Huygens, exprimat în aproximația Fresnel.

O soluție exactă a ecuației de undă este de forma (2.5):

$$\tilde{E}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = \frac{\exp(-ik \cdot \mathbf{R})}{R},$$

unde  $\tilde{E}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$  reprezintă câmpul în punctul  $\mathbf{r}$  aflat la distanța:

$$R = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}.$$

față de sursa dispusă în punctul  $\mathbf{r}_0$ , care radiază câmp *em*. Această relație descrie o undă sferică uniformă care diverge din sursa punctiformă  $S_0$ .

Să considerăm că sursa punctiformă este localizată în punctul  $(x_0, y_0, z_0)$  în afara axei  $z$ , dar nu departe de aceasta, și să calculăm expresia fazorului câmpului  $\tilde{E}(x, y, z)$  (sau  $\tilde{u}(x, y, z)$ ), în punctul  $(x, y, z)$  situat în planul  $(x, y)$  perpendicular la axa  $z$ , dar nu departe de aceasta. În aceste condiții, în aproximația Fresnel, distanța  $R$  se poate exprima printr-o dezvoltare în serie de puteri cu limitare la aproximația de ordinul doi, sub forma:

$$(2.12) \quad R = z - z_0 + \frac{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}{2(z - z_0)} + \dots$$

La numitorul relației (2.5) ne putem limita la aproximația de ordinul întâi.

În aproximația Fresnel (aproximația unei sferice paraxiale) soluția (2.5) devine:

(2.13 a)



$$\tilde{E}(x, y, z) \cong \frac{1}{z - z_0} \exp \left[ -ik(z - z_0) - ik \frac{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}{2(z - z_0)} \right]$$

$$(2.13 \text{ b}) \quad \tilde{u}(x, y, z) \cong \frac{1}{z - z_0} \exp \left[ -ik \frac{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}{2(z - z_0)} \right].$$

Din relația (2.13 a) rezultă că dacă într-un plan  $(x, y)$ , perpendicular la direcția  $z$  și situat departe de sursa de radiație, variația fazei este pătratică în  $(x, y)$ , atunci unda radiată este de tip sferic. Relațiile (2.13 a, b) reprezintă o soluție exactă a ecuației de undă paraxială.

Soluțiile de tipul (2.5) sau (2.13 a, b) pot fi folosite pentru exprimarea principiului Huygens, care permite analiza modului de propagare a câmpului. Dacă este definit câmpul pe o suprafață dată, atunci fiecare punct al acestei suprafețe poate fi considerat drept o sursă elementară care radiază o undă sferică elementară ("Huygens wavlet"). Câmpul radiat de către întreaga suprafață, calculat într-un punct dat  $(x, y)$  al unui plan perpendicular la direcția de propagare  $z$ , la distanța  $(z - z_0)$  este dat de interferența tuturor undelor elementare radiate de pe suprafață (integrala Huygens):

$$(2.14) \quad \tilde{E}(x, y, z) = \frac{i}{\lambda} \iint_{S_0} \tilde{E}_0(x_0, y_0, z_0) \cos \theta \frac{\exp(-ik \cdot R)}{R} dS_0,$$

unde  $R$  reprezintă distanța dintre sursa elementară și punctul de observare, mărimea  $\cos \theta$  reprezintă "factorul de înclinare" unde  $\theta$  este unghiul dintre direcția sursă-punct de observare și normala la elementul de suprafață, iar  $dS_0$  - aria elementului de suprafață centrat în jurul punctului  $(x_0, y_0, z_0)$ . Mărimea  $i/\lambda$  reprezintă un factor de normare. (Relația (2.14) a fost dezvoltată ulterior de către Kirchhoff și Rayleigh-Sommerfeld).

Să aplicăm integrala Huygens în cazul fascicului paraxial. La numitorul relației (2.14) distanța se aproximează prin  $R \cong (z - z_0)$ , iar argumentul exponentului prin relația (2.12):

$$(2.15) \quad \tilde{E}(x, y, z) \cong \frac{ie^{-ik(z-z_0)}}{\lambda(z-z_0)} \iint_{S_0} \tilde{E}_0(x_0, y_0, z_0) \exp \left[ -ik \frac{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}{2(z-z_0)} \right] dx_0 dy_0$$

(distanța  $(z - z_0)$  dintre planul unde se calculează câmpul și cel unde este plasată sursa este suficient de mare astfel încât unghiul de înclinare este mai mic de 0,5 rad, deci factorul de înclinare se aproximează cu unu). Din relația (2.15) se obține:

$$\tilde{u}(x, y, z) \cong \frac{i}{\lambda L} \iint_{S_0} \tilde{u}_0(x_0, y_0, z_0) \exp \left[ -ik \frac{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}{2L} \right] dx_0 dy_0$$

(mărimea  $\exp(-ikL)$  descrie variația axială a fazei frontului de undă plan).

### 2.3 Unde gaussiano-sferice.

*Unde sferice paraxiale.* Să considerăm că o undă sferică uniformă diverge dintr-o sursă punctiformă localizată în punctul  $(x_0, y_0, z_0)$  (planul  $(x_0, y_0)$  perpendicular la direcția  $z$  în punctul  $z_0$ ) și este observată în punctul  $(x, y)$  localizat în planul perpendicular la direcția  $z$  în punctul de coordonată  $z$ . Dacă distanța  $(z - z_0)$  este mare față de distanțele  $(x_0, y_0)$ , respectiv  $(x, y)$  atunci distribuția câmpului în planul  $(x, y)$ , calculată în "aproximația paraxială" este:

$$(2.16 \text{ a}) \quad \tilde{u}(x, y, z) \cong \frac{1}{R(z)} \exp[-i\phi(x, y, z)],$$

unde:  $R(z) = z - z_0$  reprezintă raza de curbură a unei sfere în punctul  $z$ , iar

$$(2.16 \text{ b}) \quad \phi(x, y, z) = \frac{\pi}{\lambda} \frac{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}{R(z)},$$

variația fazei unde în planul  $(x, y)$ , perpendicular la direcția de deplasare în punctul  $z$ . Conform convenției de semn acceptată, o valoare  $R > 0$  indică o undă divergentă (care expandează din sursă), în timp ce  $R < 0$  indică o undă convergentă (se deplasează spre sursa punctiformă). Mărimile  $k$  și  $\lambda$  se referă la mediul în care se propagă câmpul. Variația pătratică a fazei din relația (2.16) descrie o aproximație paraxială care se referă la suprafața unei sfere; dacă ne situăm departe de axa optică, această formă conduce la erori asupra fazei. În fig. 78 a, b este prezentată grafic variația amplitudinii (a), respectiv a fazei (b) în planul  $(x, y)$ , perpendicular la direcția de propagare, în cazul unei unde sferice. Din grafice rezultă că valoarea amplitudinii tinde la zero numai la distanțe foarte mari față de axa de propagare, iar variația fazei se înscrie pe o curbă circulară. Din acest punct de vedere pentru a cunoaște câmpul unei sfere trebuie să cunoaște frontul de undă (de fază) precum și distribuția amplitudinii câmpului în planul  $(x, y)$  (fig. 78 c).

Unda sferică paraxială, soluție a ecuației de undă paraxială, nu descrie un fascicul fizic real deoarece în planul  $(x, y)$  amplitudinea nu tinde la zero în imediata apropiere a axei, ci atunci când coordonatele  $(x, y)$  tind la infinit. O asemenea undă transportă prin planul  $(x, y)$  o cantitate infinit de mare de energie.

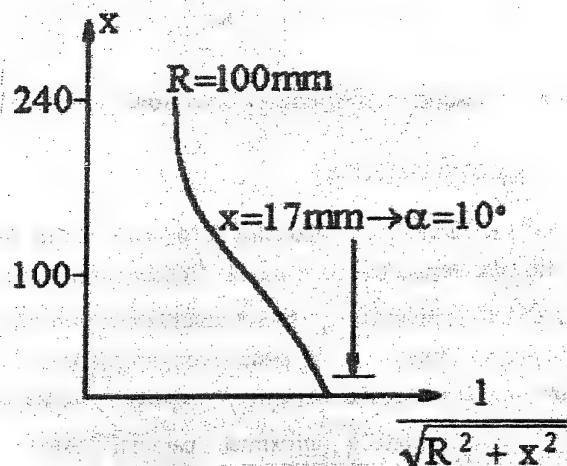


Fig. 78 a

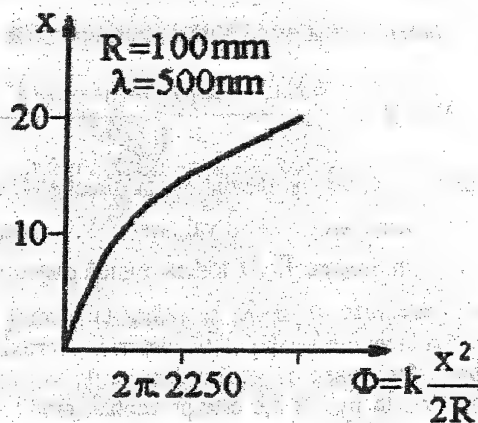


Fig. 78 b

**Fascicule gaussiano-sferice.** Distribuția spațială a componentei electrice a câmpului  $em$  în modul de oscilație fundamental al rezonatorului optic evidențiază o formă asemănătoare unui "fascicul de raze aproape paralele". Forma este păstrată de către fascicul și dacă acesta părăsește cavitatea rezonatorului printr-o oglindă de capăt. Particularitățile formei se manifestă în special atunci când asupra fascicului acționează diferite elemente optice (în special lentile sau oglinzi) sau când acesta trebuie introdus într-un rezonator pasiv (de ex. rezonatorul unui analizor spectral confocal).

Dacă acest fascicul este incident pe un ecran perpendicular la direcția de propagare ( $z$ ) se observă o distribuție a intensității sub formă de spot (pată):

- spotul prezintă o simetrie circulară (deci fasciculul prezintă o simetrie cilindrică);

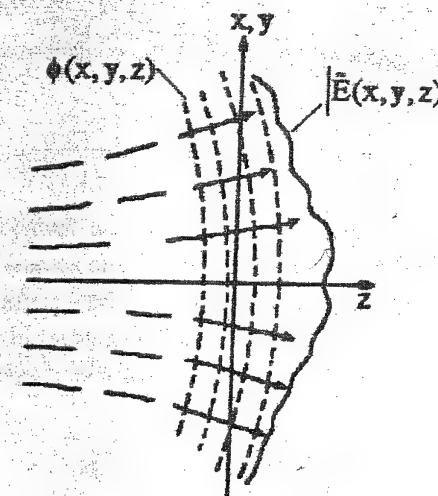


Fig. 78 c

- în planul  $(x, y)$  perpendicular la direcția de propagare, odată cu depărtarea de axa centrală, valoarea intensității locale față de cea de pe axa  $z$  se micșorează rapid tinzând spre valoarea zero. Rata descreșterii intensității funcție de valoarea  $x$ , respectiv  $y$ , sugerează o dependență descrisă de o funcție gaussiană. De aceea se introduce mărimea  $w(z)$  care reprezintă depărtarea în planul  $(x, y)$  față de axa optică pentru care valoarea intensității este diminuată de  $e^2$  ori față de cea din centrul spotului (valoarea amplitudinii câmpului scade de  $e$  ori față de valoarea acesteia în centrul spotului). În cazul modului de oscilație fundamental mărimea  $w(z)$  reprezintă raza spotului în care este prezentă cea mai mare parte din energia fascicului.

- valoarea mărimii  $w(z)$  depinde de poziția planului  $(x, y)$ ; această valoare crește odată cu creșterea valorii coordonatei  $z$ .

Pe baza acestor observații, pentru a descrie distribuția intensității în interiorul spotului modului de oscilație fundamental se poate accepta o relație de forma unei distribuții gaussiene:

$$(2.17 a) \quad I(x, y, z) \propto |\tilde{E}(x, y, z)|^2 \exp\left[-\frac{2(x^2 + y^2)}{w^2}\right],$$

căreia îi corespunde fazorul-amplitudine de forma:

$$(2.17 \text{ b}) \quad \tilde{E}(x, y, z) \propto N \exp \left[ -i \frac{k(x^2 + y^2)}{2\tilde{q}(z)} \right] \exp[-i\tilde{p}(z)].$$

Forma (2.17 b) descrie un contur de tip Gauss dacă parametrul  $\tilde{q}(z)$  este de forma:

$$(2.18) \quad \frac{1}{\tilde{q}(z)} = -i \frac{2}{k w(z)^2} = -i \frac{\lambda}{\pi w(z)^2}.$$

Parametrul  $\tilde{q}(z)$  este o mărime complexă, iar faptul că depinde de coordonata  $z$  face posibilă exprimarea dependenței dimensiunii spotului de această coordonată. Parametrii  $\tilde{q}(z)$  și  $\tilde{p}(z)$  trebuie să descrie caracteristicile fascicului gaussian prezentate mai sus.

Forma acestor parametri trebuie determinată astfel încât expresia (2.17 b) să reprezinte o soluție a ecuației de undă paraxială (2.11 b). Acceptând forma (2.17 b) a câmpului electric, se obțin relațiile:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{E}(x, y, z)}{\partial z} &= \\ &= -iN \left[ \frac{d\tilde{p}(z)}{dz} - \frac{k(x^2 + y^2)}{2\tilde{q}^2(z)} \frac{d\tilde{q}(z)}{dz} \right] \exp \left[ -i \frac{k(x^2 + y^2)}{2\tilde{q}(z)} \right] \exp[-i\tilde{p}(z)] \\ \frac{\partial^2 \tilde{E}(x, y, z)}{\partial x^2} &= -N \left[ \frac{ik}{\tilde{q}(z)} - \frac{k^2 x^2}{\tilde{q}^2(z)} \right] \exp \left[ -i \frac{k(x^2 + y^2)}{2\tilde{q}(z)} \right] \exp[-i\tilde{p}(z)], \end{aligned}$$

care, introduse în ecuația de undă paraxială (2.11 b), conduc la ecuația:

$$\begin{aligned} N \left\{ \frac{k^2(x^2 + y^2)}{\tilde{q}^2(z)} \left[ \frac{d\tilde{q}(z)}{dz} - 1 \right] + 2k \left[ \frac{d\tilde{p}(z)}{dz} + \frac{i}{\tilde{q}(z)} \right] \right\} \times \\ \exp \left[ -i \frac{k(x^2 + y^2)}{2\tilde{q}(z)} \right] \exp[-i\tilde{p}(z)] = 0 \end{aligned}$$

Forma (2.17 b) reprezintă o soluție a ecuației de undă paraxială, dacă funcțiile  $\tilde{p}(z)$  și  $\tilde{q}(z)$  sunt soluții ale ecuațiilor:

$$(2.19) \quad \text{a) } \frac{d\tilde{q}(z)}{dz} = 1, \quad \text{b) } \frac{d\tilde{p}(z)}{dz} = -\frac{i}{\tilde{q}(z)}.$$

Din ecuația (2.19 a) rezultă:

$$(2.20) \quad \tilde{q}(z) = z + \tilde{q}_0.$$

unde valoarea  $\tilde{q}_0 = \tilde{q}(0)$  se obține din condiția inițială (valoarea funcției  $\tilde{q}(z)$  pentru coordonata  $z = 0$ ). Din relația (2.19 b), considerând relația (2.20), se obține:

$$d\tilde{p}(z) = -\frac{i}{\tilde{q}(z)} dz = -i \frac{d[\tilde{q}(z)]}{\tilde{q}(z)},$$

de unde:

$$\tilde{p}(z) = -i \ln \tilde{q}(z) + C.$$

Mărimea  $C$  reprezintă constanta de integrare, care se determină din condiția inițială:

$$\tilde{p}(0) = 0, \text{ de unde: } C = i \ln \tilde{q}_0, \text{ deci:}$$

$$(2.21) \quad \tilde{p}(z) = -[i \ln \tilde{q}(z) + i \ln \tilde{q}_0] = -i \ln \frac{z + \tilde{q}_0}{\tilde{q}_0}.$$

Parametrul  $\tilde{q}(z)$ , fiind o funcție complexă, poate fi scris sub forma:

$$(2.22) \quad \frac{1}{\tilde{q}(z)} = \frac{1}{R(z)} - i \frac{\lambda}{\pi w(z)^2},$$

unde funcțiile  $R(z)$  și  $w(z)$  reprezintă mărimi reale.

Folosind relațiile (2.21) și (2.22) se poate scrie:

$$(2.23) \quad \exp[-i\tilde{p}(z)] = \exp \left[ -\ln \frac{z + \tilde{q}_0}{\tilde{q}_0} \right] = \frac{\tilde{q}_0}{z + \tilde{q}_0} = \frac{1}{1 + \frac{z}{\tilde{q}_0} - i \frac{\lambda z}{R_0 w_0^2}},$$

unde mărimile  $R_0$  și  $w_0$  reprezintă valorile mărimilor  $R(z)$  și  $w(z)$  în punctul de coordonată  $z = 0$ . Dacă se cunosc valorile mărimilor  $R_0$  și  $w_0$ , atunci valorile  $R(z)$  și  $w(z)$  se pot calcula pentru orice valoare a coordonatei  $z$ . Deoarece fixarea coordonatei  $z = 0$  este arbitrară, se alege planul  $z = 0$  pentru care raza de curbură reală a frontului de undă (de fază) este  $R_0 \rightarrow \infty$ ; în acest caz relația (2.22) este identică cu relația (2.17).

În aceste condiții, folosind relația (2.20), se pot stabili expresiile mărimilor  $R(z)$  și  $w(z)$ :

$$\frac{1}{\tilde{q}(z)} = \frac{\frac{1}{\tilde{q}_0}}{1 + \frac{z}{\tilde{q}_0}} = \frac{\frac{1}{\tilde{q}_0} \left( \frac{\lambda z}{\pi w_0^2} \right)^2 + i \frac{\lambda}{\pi w_0^2}}{1 + \left( \frac{\lambda z}{\pi w_0^2} \right)^2} = \frac{1}{R(z)} - i \frac{\lambda}{\pi w(z)^2},$$



de unde rezultă:

$$(2.24) \quad a) \quad w(z) = w_0 \sqrt{1 + \left( \frac{z\lambda}{\pi w_0^2} \right)^2}, \quad b) \quad R(z) = z + \left( \frac{\pi w_0^2}{\lambda} \right)^2 \frac{1}{z}$$

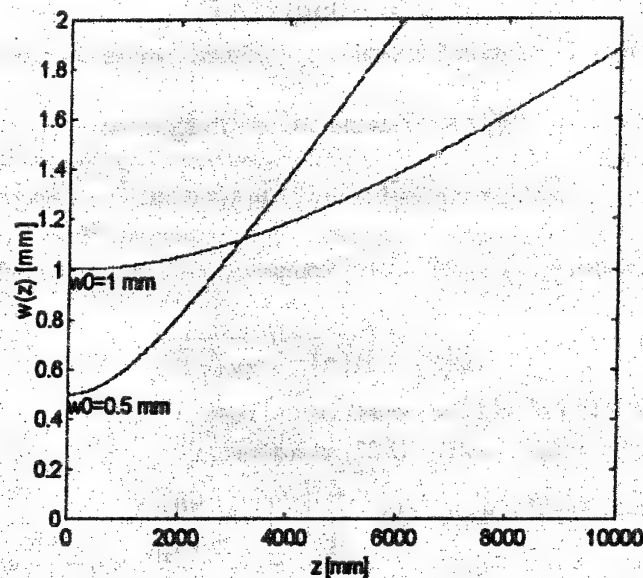


Fig. 79 a

Relația (2.24 a) descrie dependența dimensiunii spotului fascicului gaussian de localizarea ( $z$ ) a planului ( $x, y$ ) perpendicular la direcția de propagare a fascicului. Din această relație rezultă că rata expandării dimensiunii spotului depinde de dimensiunea "taliei" fascicului. Dacă mărimea  $w_0$  este mică rata este rapidă și invers. Expandarea este determinată de fenomenul de difracție, deoarece mărimea  $w_0$  reprezintă o "limitare" a dimensiunii fascicului. Această relație este prezentată grafic în fig. 79 a.

Deoarece la o depărtare relativ mică față de "talie" rata expandării este mică, pe acest interval fasciculul poate fi considerat drept un "fascicul de raze aproape paralele". Pentru a delimita acest domeniu se consideră de ambele părți ale "taliei" distanța  $z_R$  pentru care dimensiunea fascicului crește de  $\sqrt{2}$  ori (suprafața spotului se dublează). Pentru această distanță, din relația (2.24 a), se obține:

$$(2.25) \quad z = z_R = \frac{\pi w_0^2}{\lambda}$$

Distanța  $z_R$  delimitează așa numitul domeniu Rayleigh. Această denumire

este folosită în teoria antenelor pentru a marca distanța  $z \cong \frac{d^2}{\lambda}$  parcursă de un

fascicul de radiație  $em$ , generat de o antenă cu diametrul aparturii egal cu  $d$ , unde  $d \gg \lambda$ , înainte ca acesta să prezinte o divergență puternică. Pe această distanță fasciculul poate fi considerat drept un "fascicul de raze aproape paralele". Distanța Rayleigh, pentru un fascicul gaussian, reprezintă o "linie de demarcare" între așa numitul "câmp apropiat" sau câmpul Fresnel și "câmpul îndepărtat" sau câmpul Fraunhofer.

Distanța dintre planele dispuse deoparte și de cealaltă a "taliei" fascicului, în care dimensiunea fascicului este egală cu  $\sqrt{2}w_0$ , este cunoscută sub denumirea de parametru confocal, fiind dată de relația:

$$(2.26) \quad b = 2z_R = \frac{2\pi w_0^2}{\lambda}$$

Pe acest domeniu fasciculul poate fi considerat drept un "fascicul de raze aproape paralele".

$$\text{Relația (2.24 b) } R(z) = z + \frac{\pi^2 w_0^4}{\lambda^2} \frac{1}{z} = z + \frac{z_0^2}{z}, \text{ evidențiază dependența}$$

de parametrul  $z$  a razei reale de curbura a frontului de undă localizat la distanța  $z$  față de "talie". Această dependență este diferită în "câmpul apropiat" față de "câmpul îndepărtat":

$$R(z) = z + \frac{z_R^2}{z} \cong \begin{cases} \infty & z \ll z_R \\ 2z_R & z = z_R \\ z & z \gg z_R \end{cases}$$

comportarea fiind prezentată în fig. 79 b. Exact la nivelul "taliei", frontul de undă este plan ( $R(z) \rightarrow \infty$ , centrul de curbura fiind dispus la  $z \rightarrow -\infty$ ). Odată cu propagarea fascicului (distanțare față de "talie") frontul de undă se curbează, deci raza de curbura, care depinde de poziționarea frontului de undă față de "talie" începe să se micșoreze tinzând spre valoarea  $R(z_R) = 2z_R$  (în acest caz centrul de curbura este dispus în poziția  $z = -z_R$ ). La propagarea ulterioară a fascicului (poziția frontului de undă  $z > z_R$ ), raza de curbura tinde să devină egală cu valoarea  $z$ , deci centrul de curbura tinde să se localizeze în planul  $z = 0$ , pe axa optică, unde sferice devenind aproape concentrice; pentru  $z \rightarrow +\infty$ , centru de curbura este localizat în planul  $z = 0$ .

Valoarea minimă a razei de curbura  $R(z_R) = 2z_R$  corespunde cazului când frontul de undă este localizat în poziția  $z = +z_R$ , iar centru de curbura în poziția  $z = -z_R$ , deci într-o poziție simetrică, adică pe suprafața frontului de undă dacă fasciculul se propagă în sensul  $z \rightarrow -\infty$ . În teoria rezonatorilor stabili acest caz reprezintă așa numitul rezonator simetric confocal, de unde și denumirea de *parametru confocal*. În acest caz "talie" este dispusă în planul de simetrie al rezonatorului și prezintă valoarea cea mai mică.

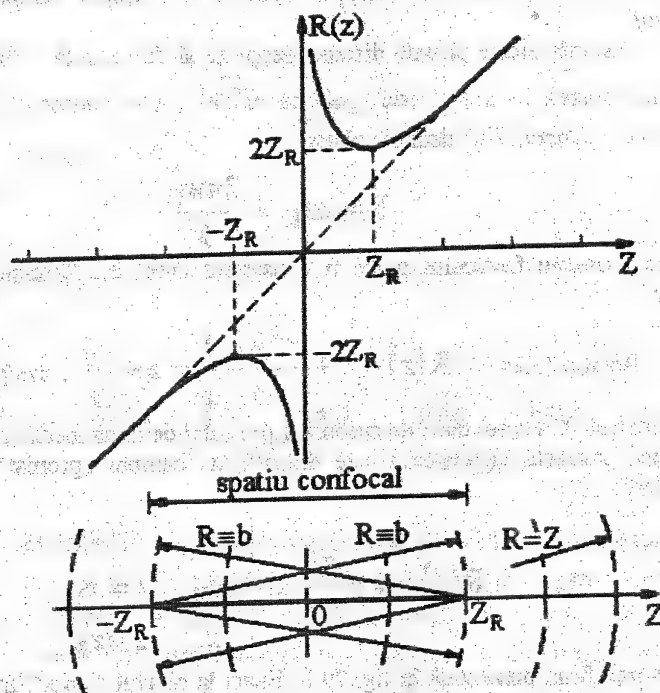


Fig. 79 b

În domeniul "câmpului îndepărtat", unde este îndeplinită condiția  $z \gg z_R$ , expresia razei reale de curbura, precum și cea a dimensiunii spotului devin:

$$(2.24') \quad a) \quad w(z) = \frac{w_0}{z_R} z = \frac{\lambda}{\pi w_0} z, \text{ respectiv: } \quad b) \quad R(z) \cong z.$$

Aceste expresii evidențiază faptul că în acest domeniu, pe de o parte undele sferice sunt aproape concentrice, centrul de curbura fiind dispus pe axa optică în planul  $z = 0$ , iar pe de altă parte creșterea dimensiunii spotului este proporțională cu distanța  $z$ . Din relația (2.24' a) rezultă că pentru "câmpului îndepărtat" se poate defini unghiul de

divergență a fasciculului (unghiul format de axa optică cu tangenta la curba locului geometric al punctelor unde amplitudinea câmpului se micșorează de  $e$  ori față de cea de pe axa optică):

$$(2.25) \quad \tan \theta = \frac{w(z)}{z} = \frac{\lambda}{\pi w_0},$$

relație ce confirmă observația că divergența fasciculului este mai mare dacă dimensiunea "taliei" este mai mică. Relația (2.25) amintește de unghiul de difracție al unui fascicul de raze paralele pe o deschidere circulară de rază  $r$ :

$$\theta = 0,61 \frac{\lambda}{r},$$

adică divergența fasciculului gaussian este de același ordin de mărime cu cea asociată divergenței unui fascicul de raze paralele difractat de o deschidere circulară cu raza  $r \cong w_0$ , localizată în planul "taliei".

Relația (2.23) poate fi scrisă sub forma:

$$(2.26 a) \quad \exp[-i\tilde{p}(z)] = \frac{1}{1 + i \frac{z}{z_0}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_0}\right)^2}} e^{i\phi(z)}, \text{ unde:}$$

$$(2.26 b) \quad \tan \phi(z) = \frac{z}{z_0}.$$

Conform relației (2.26 b), propagarea fasciculului gaussian de ordin inferior implică, pe lângă variația dimensiunii spotului și a razei reale de curbura, și o variație suplimentară a fazei. Dacă variația fazei se analizează în raport de planul  $z = 0$  (planul "taliei" fasciculului) considerat drept referențial, față de variația fazei unei plane ( $e^{-ikz}$ ) de-a lungul direcției de propagare, în cazul fasciculului gaussian apare o variație suplimentară, care este prezentată în fig. 80. Valoarea variației suplimentare a fazei se află în domeniul  $\left(-\frac{\pi}{2} \div 0 \div +\frac{\pi}{2}\right)$  (variația totală este egală cu  $\pi$ ), rata cea

mai rapidă a variației se află în domeniul parametrului confocal  $(-z_R \div +z_R)$ .

Din punct de vedere fizic variația suplimentară a fazei evidențiază micșorarea constantei efective de propagare axială ( $k_{ef}(z) = k - \Delta k$ ), în special în domeniul parametrului confocal, corespunzător viteza de fază este mai mare ( $v_{ef}(z) = c + \Delta v$ ) sau distanța dintre fronturile de fază este mai mare față de cazul undelor sferice.

Variația suplimentară a fazei rezultă din ecuația paraxială de undă:

$$\frac{\partial \tilde{u}(x, y, z)}{\partial z} = -\frac{i}{2k} \nabla_{xy}^2 \tilde{u}(x, y, z).$$

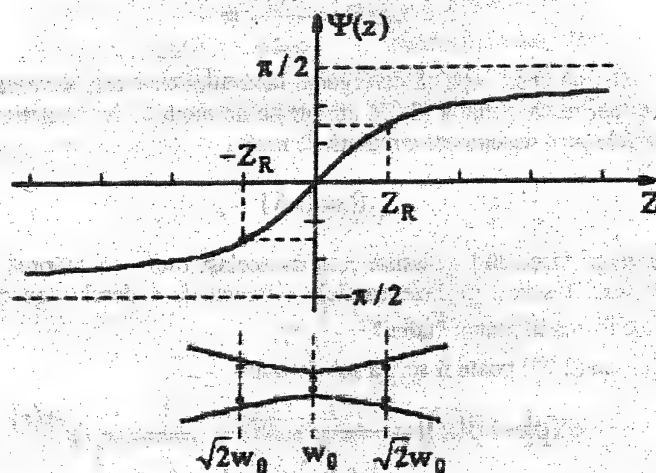


Fig. 80

Din punct de vedere fizic variația suplimentară a fazei evidențiază micșorarea constantei efective de propagare axială ( $k_{ef}(z) = k - \Delta k$ ), în special în domeniul parametrului confocal, corespunzător viteza de fază este mai mare ( $v_{ef}(z) = c + \Delta v$ ) sau distanța dintre fronturile de fază este mai mare față de cazul undelor sferice.

Variația suplimentară a fazei rezultă din ecuația paraxială de undă:

$$\frac{\partial \tilde{u}(x, y, z)}{\partial z} = -\frac{i}{2k} \nabla_{xy}^2 \tilde{u}(x, y, z).$$

Derivata transversală de ordinul doi, prin intermediul acestei ecuații, conduce la o variație suplimentară a fazei pe unitate de lungime.

Acest rezultat reprezintă efectul Guoy de variație suplimentară a fazei la trecerea unui fascicul prin zona focală. Efectul a fost evidențiat atât în domeniul optic cât și cel al microundelor.

Folosind relația (2.16 b), fazorul componentei electrice devine:

(2.27)

$$\tilde{E}_0(x, y, z) = N \frac{e^{i\phi(z)}}{\sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_0}\right)^2}} \exp\left[-i \frac{k(x^2 + y^2)}{2R(z)}\right] \exp\left[-\frac{x^2 + y^2}{w(z)^2}\right],$$

unde  $N$  reprezintă factorul de normare.

Dacă relația (2.27) se multiplică cu factorul  $e^{-ikz}$ , se obține forma explicită a relației (2.8), soluție a ecuației de undă, dacă sunt îndeplinite condițiile (2.10) de fascicul paraxial.

Distribuția intensității energetice într-un punct al spotului fascicului gaussian este dată de relația:

(2.28)

$$I(x, y, z) = \frac{c\epsilon_0}{2} |\tilde{E}(x, y, z)|^2 = \frac{|N|^2}{c\mu_0 \left[1 + \left(\frac{z}{z_0}\right)^2\right]} \exp\left[-\frac{2(x^2 + y^2)}{w(z)^2}\right] = \frac{|N|^2}{c\mu_0} \frac{w_0^2}{w(z)^2} \exp\left[-\frac{2r^2}{w(z)^2}\right]$$

Factorul  $N$  se determină din condiția de normare: valoarea cantității de energie care traversează un plan infinit extins, perpendicular la direcția de propagare, este egală cu unitatea, deci:

$$\int_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty} \int I(x, y, z) dx dy = \frac{c\epsilon_0 |N|^2}{1 + \left(\frac{z}{z_0}\right)^2} \int_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty} \int e^{-\frac{2(x^2 + y^2)}{w(z)^2}} dx dy = \frac{c\epsilon_0 |N|^2}{4} (\pi w_0^2) = 1$$

de unde:

(2.29)

$$|N|^2 = \frac{4}{c\epsilon_0 \pi w_0^2}.$$

Din relația (2.28) rezultă că la distanțe mari față de planul "taliei" fascicului distribuția intensității energetice este proporțională cu mărimea  $\left(\frac{1}{z^2}\right)$ :

(2.30)

$$I(x, y, z) \cong \frac{z_0^2}{z^2} \frac{2}{\pi w_0^2} \exp\left[-\frac{2(x^2 + y^2)}{w(z)^2}\right] = \frac{I_0 z_0^2}{z^2} \exp\left[-\frac{2(x^2 + y^2)}{w(z)^2}\right],$$



unde:  $I_0 = \frac{c\epsilon_0}{2} |N|^2 = \frac{2}{\pi w_0^2}$

Prezintă interes valoarea câmpului electric la distanțe mari față de "talie":

(2.31)

$$\tilde{E}(x, y, z) = \frac{Nz_0}{z} \exp\left[-i\left(kz + \frac{\pi}{2}\right)\right] \exp\left[-i\frac{k(x^2 + y^2)}{2R(z)}\right] \exp\left[-\frac{x^2 + y^2}{w(z)^2}\right]$$

În aceste condiții relația (2.24 a) conduce la  $R(z) \cong z$ , deci:

(2.31')

$$\tilde{E}(x, y, z) = -iNz_0 \left\{ \frac{\exp[-ikz]}{z} \exp\left[-i\frac{k(x^2 + y^2)}{2z}\right] \right\} \exp\left[-\frac{x^2 + y^2}{w(z)^2}\right]$$

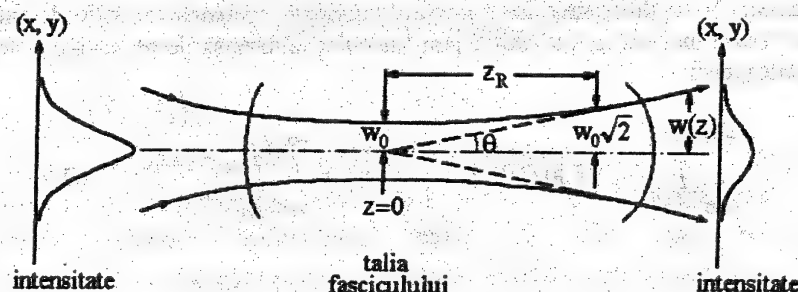


Fig. 81

Factorul din paranteză reprezintă forma (2.7) a unei unde sferice cu centrul de curbură localizat în planul "taliei" în punctul  $z = 0$ . Pentru puncte apropiate de axa fasciculului,

deoarece  $\exp\left[-\frac{x^2 + y^2}{w(z)^2}\right] \cong 1$ , expresia (2.31') are exact forma unei unde sferice.

De aceea câmpul fasciculului definit prin relația (2.31') este denumit și *undă sferică gaussiană*.

În fig. 81 sunt prezentate grafic caracteristicile fasciculului gaussian-sferic. Cele două curbe dispuse de-a lungul axei optice reprezintă locul geometric al punctelor din planul  $(x, y)$  unde valoarea energiei scade de  $e^2$  ori față de cea de pe axul optic (valoarea amplitudinii scade de  $e$  ori). Raza de curbură a frontului de fază este diferită în "câmpul apropiat" față de "câmpul îndepărtat". De asemenea este marcat unghiul de divergență al fasciculului pentru "câmpul îndepărtat".

Răza de curbură la stânga "taliei" se consideră negativă, corespunzător suprafața de fază constantă este în direcția de propagare. Câmpul, exceptând constanta  $N$ , este complet determinat de lungimea de undă  $\lambda$  și dimensiunea  $w_0$  a "taliei" fasciculului. Pentru o lungime de undă și o valoare  $w_0$  date, în orice punct, se pot determina dimensiunea spotului și raza de curbură. Prin urmare un fascicul gaussian de radiație armonică este complet determinat prin trei parametri:  $w_0$ , localizarea "taliei" și amplitudinea câmpului.

Valoarea parametrului  $w_0$  trebuie să fie mai mare decât cea a lungimii de undă. Această restricție rezultă din cerința câmpului de a satisface condițiile (2.10), impuse la deducerea ecuației de undă paraxială, adică soluția (5.2) este valabilă în aproximația în care a fost dedusă. Restricția implică faptul că unghiul de divergență al fasciculului trebuie să fie mic, adică fasciculul să fie paraxial.

### 3. Rezonatori optici stabili

Să considerăm un fascicul gaussian-sferic a cărui "talie", în sistemul de coordonate  $(x, z, y)$ , este localizată în planul  $z = 0$  și două oglinzi sferice a căror rază de curbură sunt  $R_1$ , respectiv  $R_2$ . Pe axa  $z$  de propagare a fasciculului gaussian există două puncte  $z_1$ , respectiv  $z_2$ , situate la distanța  $L$  unul de celălalt, unde razele reale ale fasciculului sunt egale cu razele de curbură ale oglinzilor.

Dacă în aceste puncte se plasează cele două oglinzi în așa fel încât planul tangent în vârful lor este perpendicular la axa  $z$ , atunci frontul de undă al fasciculului gaussian se "cuplează" cu suprafața de curbură a oglinzilor (fig. 82 b). Dacă diametrul oglinzilor este mult mai mare decât diametrul spotului fasciculului la nivelul oglinzilor ( $a_1, a_2 \gg w_1, w_2$ ), atunci perturbarea câmpului determinată de fenomenul de difracție la nivelul oglinzilor, poate fi neglijată. Dacă dimensiunile oglinzilor sunt mai mici decât dimensiunile spotului la nivelul oglinzii câmpul *em* din rezonator se "scurge" pe lângă oglinzi (iese din cavitate).

Vectorul de undă la nivelul frontului de undă (de fază) este perpendicular la suprafața oglinzilor, iar prin reflexie oglinzile returnează fasciculul pe direcția de incidență. Această situație are loc și la nivelul celei de a doua oglinzi. În acest mod se poate considera că cele două oglinzi formează o "capcană" pentru fasciculul gaussian prezent în cavitatea delimitată de cele două oglinzi. Într-un punct dat al spațiului din cavitate acționează cele două câmpuri *em* reflectate de oglinzi, care se propagă în sensuri opuse. În anumite condiții, interferența acestor câmpuri conduce la formarea unui sistem de unde staționare.

Pentru a analiza comportarea unui rezonator optic să considerăm problema inversă: fiind date două oglinzi sferice  $O_1$  și  $O_2$ , cu razele de curbură  $R_1$  și  $R_2$ , distanța dintre vârfurile lor fiind egală cu  $L$  (lungimea rezonatorului) să calculăm parametrii fasciculului gaussian-sferic ale cărui raze reale de curbură ale frontului de

undă (fază) sunt egale cu  $R_1$ , respectiv  $R_2$ . Presupunem că dimensiunea spotului "taliei" este egală cu  $w_0$  (o mărime necunoscută), căruia îi corespunde domeniul Rayleigh  $z_R = \frac{\pi w_0^2}{\lambda}$ , iar oglinzile sunt localizate în punctele  $z_1$ , respectiv  $z_2$  față de poziția  $z = 0$  a "taliei" fasciculului (poziții necunoscute) (fig. 82 a).

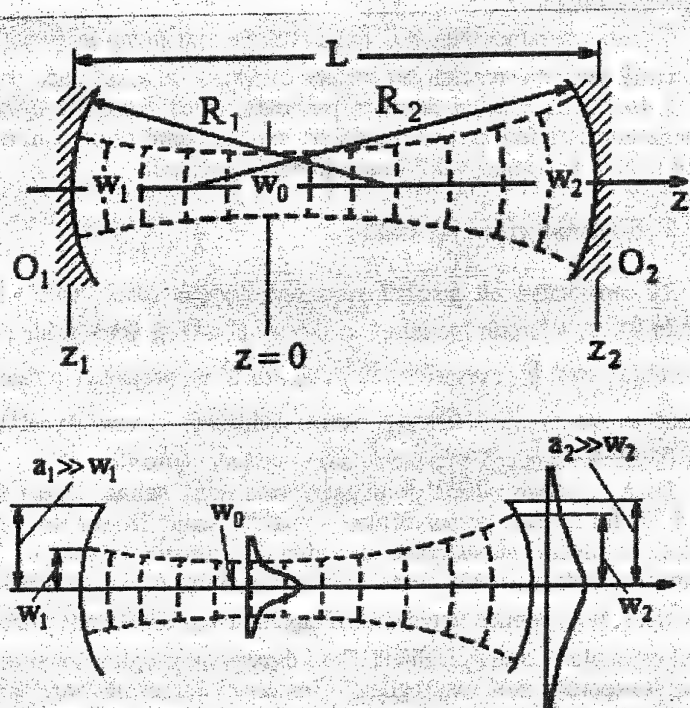


Fig. 82 a,b

Pe baza condiției de coincidență a razei de curbură a oglinzii cu cea a frontului de undă se pot scrie relațiile:

$$(3.1) \quad a) \quad R(z_1) = z_1 + \frac{z_R^2}{z_1} = -R_1, \quad b) \quad R(z_2) = z_2 + \frac{z_R^2}{z_2} = +R_2,$$

$$c) \quad L = z_2 - z_1.$$

(Semnul "minus" este solicitat de convenția de semne).

Ecuatiile (3.1) permit calculul mărimilor  $z_1$ ,  $z_2$  și  $z_R$ , ale căror expresie, dacă se introduc mărimile adimensionale cunoscute sub denumirea de "parametrii  $g$  ai rezonatorului":

$$(3.2) \quad g_1 = 1 - \frac{L}{R_1}, \quad g_2 = 1 - \frac{L}{R_2}$$

au forma:

$$(3.3) \quad a) \quad z_1 = \frac{g_2(1-g_1)}{g_1+g_2-2g_1g_2} L, \quad b) \quad z_2 = \frac{g_1(1-g_2)}{g_1+g_2-2g_1g_2} L$$

$$c) \quad z_R^2 = \frac{g_1g_2(1-g_1g_2)}{(g_1+g_2-2g_1g_2)^2} L^2.$$

Folosind relațiile (2.23 b, 2.24), "tală" fasciculului ( $w_0$ ) și dimensiunile spotului fasciculului gaussian la nivelul oglinzilor ( $w_1$ , respectiv  $w_2$ ) se pot exprima funcție de parametrii rezonatorului:

$$(3.4) \quad w_1^2 = \frac{L\lambda}{\pi} \sqrt{\frac{g_2}{g_1(1-g_1g_2)}}, \quad w_2^2 = \frac{L\lambda}{\pi} \sqrt{\frac{g_1}{g_2(1-g_1g_2)}}$$

$$w_0^2 = \frac{L\lambda}{\pi} \sqrt{\frac{g_1g_2(1-g_1g_2)}{(g_1+g_2-2g_1g_2)^2}}$$

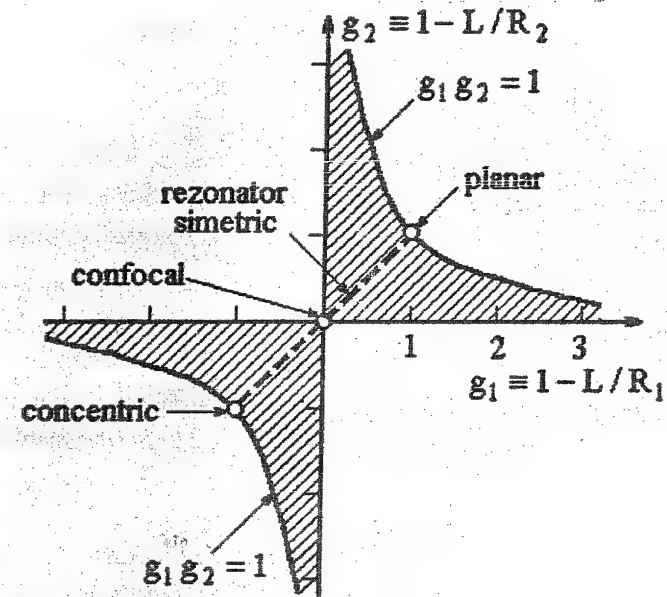


Fig. 83

Din relațiile (3.4 a,b,c) rezultă că mărimile  $w_0$ ,  $w_1$  și  $w_2$  prezintă valori finite dacă parametrii  $g_1$  și  $g_2$  satisfac relația cunoscută sub denumirea de "condiție de stabilitate":

$$(3.5) \quad 0 \leq g_1 g_2 \leq 1.$$

Această relație poate fi reprezentată grafic într-un sistem de coordonate  $(g_1, g_2)$ , grafic cunoscut sub denumirea de "diagramă de stabilitate" (fig. 83). Din relațiile (3.2) rezultă că un rezonator optic (mărimile  $R_1$ ,  $R_2$  și  $L$  sunt date) este definit de parametrii  $g_1$  și  $g_2$ . Prin urmare se poate realiza o corespondență biunivoca între un rezonator dat și un punct  $(g_1, g_2)$  din diagrama de stabilitate. Dacă punctul este dispus în domeniul hașurat al diagramei, atunci rezonatorul este "stabil din punct de vedere optic", adică dimensiunile spotului fascicului gaussian la nivelul oglinzilor sunt finite; se pot realiza oglinzi cu diametru finit dar mai mare decât dimensiunile spotului pentru a înlătura fenomenul de "scurgere a energiei". Dacă punctul este dispus în domeniul nehașurat, atunci dimensiunile spotului tind la infinit, iar rezonatorul este nestabil pentru fasciculul gaussian din cavitatea optică realizată.

Diagrama de stabilitate depinde numai de parametrii rezonatorului, fiind independentă de lungimea de undă a radiației ce formează modul de oscilație, cât și de dimensiunile transversale ale acestuia.

În continuare sunt analizate câteva tipuri de rezonatori.

### 3.1 Rezonatori simetrici.

Reprezintă configurația cea mai simplă, fiind constituită din două oglinzi sferice identice ( $R_1 = R_2 = R$ ), dispuse cu curbura "față în față", la distanța  $L$  între vârfuri (fig. 82). Caracteristicile fascicului gaussian prezent în această configurație sunt:

$$(3.6) \quad w_0^2 = \frac{L\lambda}{\pi} \sqrt{\frac{1+g}{4(1-g)}}, \text{ respectiv: } w_1^2 = w_2^2 = \frac{L\lambda}{\pi} \sqrt{\frac{1}{1-g^2}}.$$

În diagrama de stabilitate, punctele corespunzătoare acestor rezonatori sunt dispuse de-a lungul bisectoarei unghiului diedru (1,3), iar domeniul de variație al mărimii  $g$  este:

$$-1 \leq g \leq +1.$$

În fig. 84 este prezentată variația dimensiunilor spotului fascicului gaussian ( $w_0, w_1, w_2$ ), pentru o lungime dată a rezonatorului, funcție de variația parametrului  $g$  (variația razei de curbură a oglinzilor).

**Rezonator simetric confocal.** Rezonatorul care corespunde punctului central al diagramei de stabilitate ( $g_1 = g_2 = 0$ ) este caracterizat prin valorile

$R_1 = R_2 = L$ , adică centrul de curbură al unei oglinzi este situat pe suprafața celeilalte (punctele focale ale oglinzilor coincid, fiind situate în poziția  $L/2$  față de suprafața oglinzilor), iar distanța dintre oglinzi este egală cu dublul lungimii domeniului Rayleigh caracteristic fascicului gaussian rezonant din cavitate (fig. 85).

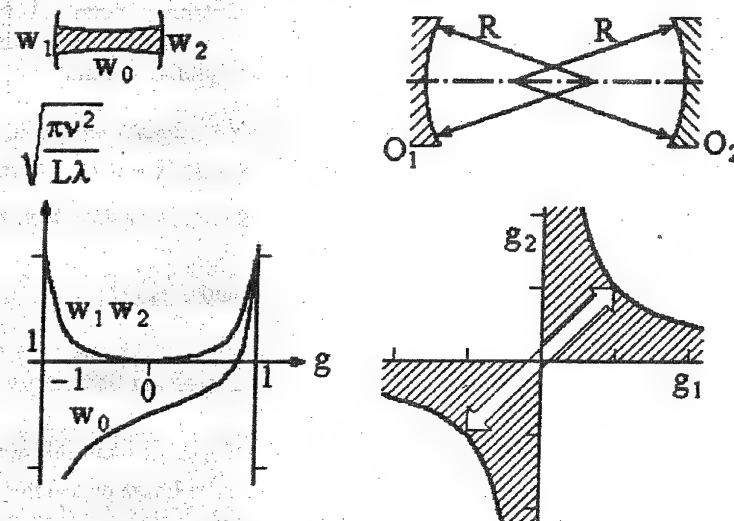


Fig. 84

Dimensiunile spotului fascicului gaussian sunt date de relațiile:

$$(3.7) \quad w_0^2 = \frac{L\lambda}{2\pi}, \quad w_1^2 = w_2^2 = \frac{L\lambda}{\pi} = 2w_0^2$$

și prezintă valorile cele mai mici ce se pot obține într-un rezonator (deși în unii rezonatori, într-un singur punct, se pot obține valori și mai mici).

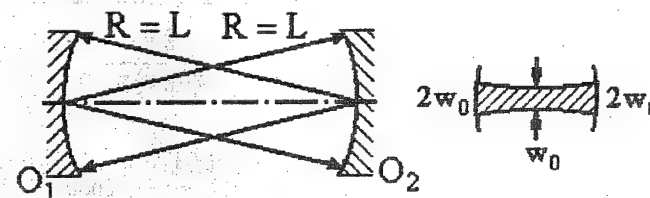


Fig. 85

Avantajul acestei cavități constă în faptul că este puțin sensibilă la dezalinierea oglinzilor rezonatorului. Dacă una din oglinzi se rotește în jurul axei  $x$  sau  $y$ , centrul de curbură al acesteia rămâne localizat pe suprafața celeilalte, iar deplasarea axei optice a rezonatorului este foarte mică. De asemenea faptul că dimensiunile spotului la nivelul



oglinzilor sunt mici asigură o valoare mică a pierderilor prin fenomenul de difracție. Din această cauză acest tip de rezonator este utilizat pentru testarea preliminară a "mediilor active" necunoscute. Structura este utilă atunci când se fac măsurători asupra puterii (energii) care poate fi extrasă de la un mediu activ dat, fără a impune condiții deosebite de aliniere.

Dezavantajul acestei cavități constă în faptul că volumul ocupat de un mod de oscilație este mic (dimesiunea medie a spotului este mică), deci puterea extrasă de la mediul activ, prin fenomenele forțate, este mică. În schimb mediul activ poate fi acoperit cu mai multe moduri de oscilație.

Rezonatori aproape-planari (oglinzi cu rază de curbura mare). În acest caz lungimea rezonatorului este finită, dar  $R_1 \cong R_2 \cong R \rightarrow \infty$ , corespunzător  $g_1 \cong g_2 \cong 1$ . Dimensiunile spotului, conform relației (3.6), sunt date de relațiile:

$$(3.8) \quad w_0^2 \cong w_1^2 \cong w_2^2 \cong \frac{L\lambda}{\pi} \sqrt{\frac{R}{2L}}, \text{ unde: } R \gg L.$$

În acest caz, odată cu creșterea razei de curbura, atât dimensiunile spotului la nivelul oglinzilor cât și dimensiunea "taliei" fascicului gaussian tind relativ încet spre valori foarte mari (fig. 84).

Dacă oglinzile sunt plane, atunci  $g_1 = g_2 = 1$ , iar rezonatorul este marcat în diagrama de stabilitate printr-un punct dispus chiar pe curba limită de stabilitate.

Deși rezonatorii aproape-planari prezintă un volum mare al modului de oscilație, totuși, în realizarea schemelor de cavități optice pentru laseri, sunt evitați din cauza dificultăților de aliniere a oglinzilor și de stabilitate mecanică a rezonatorului. Este dificil să se mențină axa optică a rezonatorului, determinată de centrele de curbura a celor două oglinzi, aliniată cu axa mediului activ. De asemenea este dificilă fabricarea și testarea oglinzilor cu rază de curbura mare, ceea ce ridică prețul de cost al produsului.

Rezonatori aproape-concentrici. În zona celuilalt capăt al bisectoarei diagramei de stabilitate ( $g_1 = g_2 = -1$ ) sunt dispuși rezonatorii aproape-concentrici. Considerăm că lungimea cavității, egală cu  $L$ , este mai mică cu mărimea  $\Delta L$  decât suma razelor de curbura ale oglinzilor:

$$R = \frac{L + \Delta L}{2}, \text{ deci: } g = 1 - \frac{2L}{L + \Delta L}.$$

De unde rezultă:

$$(3.9) \quad w_0^2 \cong \frac{L\lambda}{\pi} \sqrt{\frac{\Delta L}{4L}}, \quad w_1^2 \cong w_2^2 \cong \frac{L\lambda}{\pi} \sqrt{\frac{L}{4\Delta L}}, \text{ unde: } R \gg L.$$

În cazul acestui rezonator raza de curbura a oglinzilor este acceptabilă din punct de vedere a realizării acestora, iar dimensiunea spotului la nivelul oglinzilor poate fi variată printr-o mișcare fină de translație a unei oglinzi (fig. 86). Prin variația fină a mărimii  $\Delta L$  poziționarea rezonatorului în diagrama de stabilitate poate fi adusă chiar pe curba de stabilitate, dar dimensiunea "taliei" fascicului gaussian tinde spre valoare zero, ceea ce nu este util în special pentru extragerea din cavitate a "puterii laser".

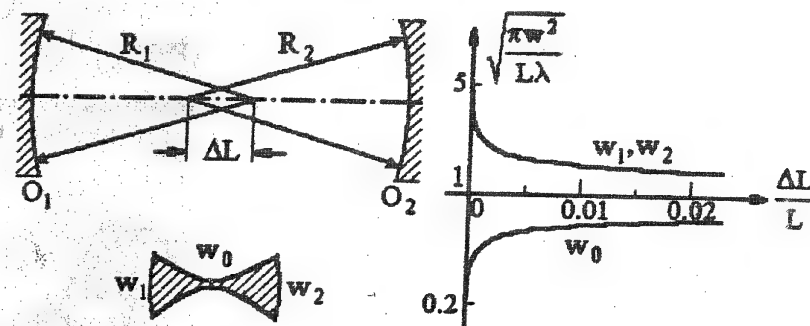


Fig. 86

În același timp centrele de curbura ale celor două oglinzi tind să se suprapună, astfel încât la limită cele două oglinzi aparțin aceleiași sfere. Din această cauză rezonatorul devine foarte sensibil la alinierea oglinzilor (variații mari ale deplasării axei optice a rezonatorului, la deplasarea  $(x, y)$  a oglinzilor).

### 3.2 Rezonatori semisimetrice

Acest tip de rezonator este constituit dintr-o oglindă plană ( $R_1 = \infty$ ) și una

sferică, deci:  $g_1 = 0$  și  $g_2 = 1 - \frac{L}{R}$ , fiind echivalent cu jumătate dintr-un rezonator simetric (care este de două ori mai lung). "Talia" fascicului gaussian este localizată pe oglinda plană, iar dimensiunile spotului sunt:

$$(3.10) \quad w_0^2 = w_1^2 = \frac{L\lambda}{\pi} \sqrt{\frac{g}{1-g}}, \text{ respectiv: } w_2^2 = \frac{L\lambda}{\pi} \sqrt{\frac{1}{g(1-g)}},$$

unde domeniul de variație al parametrului  $g$  este  $0 \leq g \leq +1$  (în diagrama de stabilitate corespunde dreptei delimitată de punctele  $(1,0)$  și  $(1,1)$ ) (fig. 87).

Rezonatori aproape-semisferici sau semi-concentrici. Reprezintă o schemă utilizată mult în construcția laserilor. Sunt caracterizați prin  $R_1 = \infty$  și  $R_2 = L + \Delta L$ , de unde rezultă:

$$g_1 = 1 \text{ și } g_2 = 1 - \frac{L + \Delta L}{L} \cong \frac{\Delta L}{L} \cong 0.$$

Este asemănător cu un rezonator aproape-simetric cu dimensiunile spotului date de relațiile:

$$(3.11) \quad w_0^2 = w_1^2 \cong \frac{L\lambda}{\pi} \sqrt{\frac{\Delta L}{L}}, \quad w_2^2 = \frac{L\lambda}{\pi} \sqrt{\frac{L}{\Delta L}}, \text{ pentru: } \Delta L \ll L.$$

Prin reglarea fină a lungimii rezonatorului se poate varia dimensiunea spotului la nivelul oglinzilor, dar în același timp se micșorează dimensiunea "taliei" localizată la nivelul oglinzii plane (fig. 88).

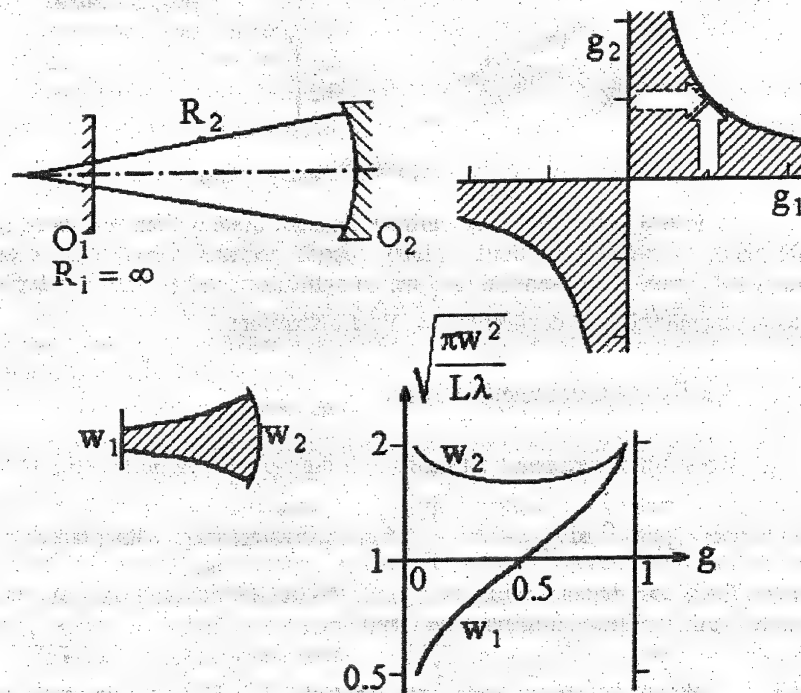


Fig. 87

*Rezonatori aproape-semisferici sau semi-concentrici.* Reprezintă o schemă utilizată mult în construcția laserilor. Sunt caracterizați prin  $R_1 = \infty$  și  $R_2 = L + \Delta L$ , de unde rezultă:

$$g_1 = 1 \text{ și } g_2 = 1 - \frac{L + \Delta L}{L} \cong \frac{\Delta L}{L} \cong 0.$$

Este asemănător cu un rezonator aproape-simetric cu dimensiunile spotului date de relațiile:

$$(3.11) \quad w_0^2 = w_1^2 \cong \frac{L\lambda}{\pi} \sqrt{\frac{\Delta L}{L}}, \quad w_2^2 = \frac{L\lambda}{\pi} \sqrt{\frac{L}{\Delta L}}, \text{ pentru: } \Delta L \ll L.$$

Prin reglarea fină a lungimii rezonatorului se poate varia dimensiunea spotului la nivelul oglinzilor, dar în același timp se micșorează dimensiunea "taliei" localizate la nivelul oglinzii plane (fig. 88). Schema este puțin sensibilă la micile dezaclinieri ale oglinzilor (dezaclinieri care intră în posibilitățile mecanice de fabricare).

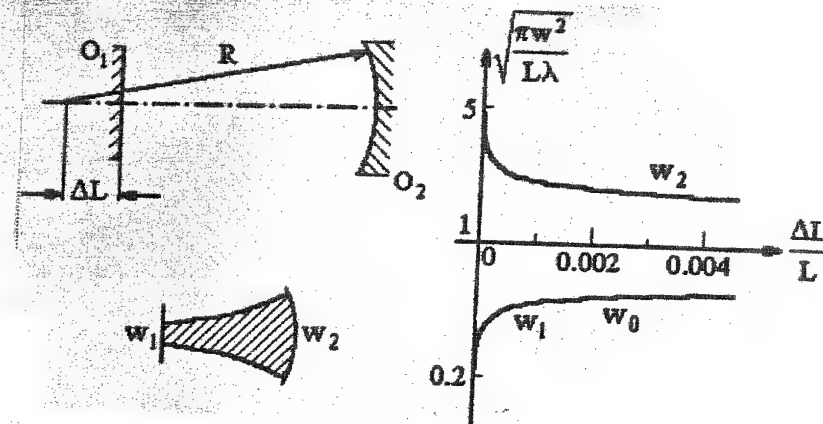


Fig. 88

Din punct de vedere constructiv, în special în cazul laserilor cu gaz, oglinzile rezonatorului pot fi aplicate direct pe capetele tubului de descărcare, preluând rolul ferestrelor de capăt, sau sunt în afara tubului, capetele acestuia fiind închise cu ferestre de tip Brewster.

În primul caz trebuie asigurate condițiile:

- lungimea  $L$  a tubului de descărcare trebuie să fie mai mare decât raza ( $R$ ) de curbură a oglinzii cu mărimea  $\Delta L$  calculată pentru a obține o dimensiune dată a spotului la nivelul oglinzii. În timpul prelucrării mecanice se poate asigura precizia determinării mărimii  $\Delta L$ ;

- capetele tubului trebuie prelucrate în așa fel încât normalele la cele două suprafețe să fie coliniare și coliniare cu axa tubului. Această cerință poate fi asigurată din punct de vedere mecanic;

- oglinda sferică poate fi aliniată față de normala la oglinda plană sau față de axa tubului, fie prin rotirea în planul  $(x, y)$ , fie prin translație perpendiculară pe axa tubului. Metoda translației se realizează ușor din punct de vedere mecanic.

În cazul laserilor cu oglinzi externe, din punct de vedere mecanic, se poate asigura atât alinierea oglinzilor, prin rotire în planul  $(x, y)$ , cât și deplasarea fină a unei oglinzi pentru a realiza o variație fină a lungimii rezonatorului. Pentru a asigura rotirea fină se utilizează așa numitele "micrometre diferențiale".

### 3.3 Rezonator concav-convex.

Dacă diametrul mediului activ este mare, folosind schemele prezentate, nu se poate extrage în mod eficient energia înmagazinată în mediul activ. S-ar putea utiliza scheme de rezonatori optici poziționate în diagrama de stabilitate la marginea acesteia, dar aceștia sunt foarte sensibili la alinierea rezonatorului.

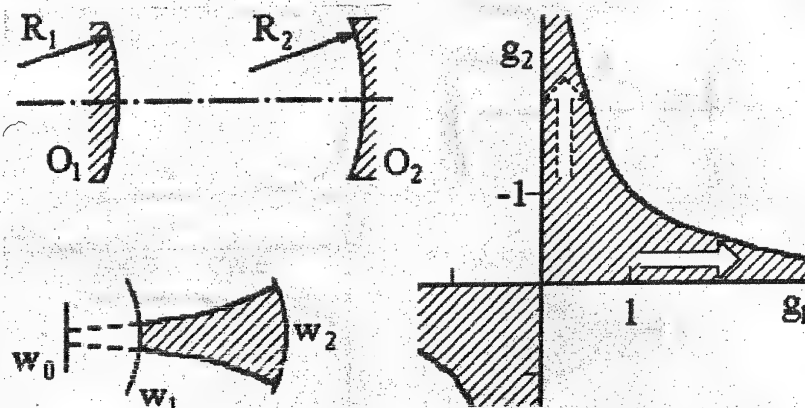


Fig. 89

Dacă rezonatorul este caracterizat prin valori  $(g_1 > 1, g_2 < 1)$  sau  $(g_1 < 1, g_2 > 1)$  se obține așa numitul rezonator *stabil concav-convex* (fig. 89). În cazul acestui rezonator "tală" fascicului este poziționată în afara rezonatorului, iar dimensiunea spotului este mare în orice plan  $(x, y)$  în interiorul rezonatorului. Acești rezonatori necesită oglinzi cu rază de curbă mare (difícil de fabricat și testat) și sunt sensibili la aliniere.

### 3.4 Rezonator confocal nestabil.

De asemenea se pot realiza rezonatori confocali, dar asimetrice, adică rezonatori în care cele două oglinzi au raze de curbă diferite  $(R_1, R_2)$ , dar punctele focale ale acestora coincid. În acest caz se poate scrie relația:

$$(3.12) \quad \frac{R_1}{2} + \frac{R_2}{2} = L, \text{ care este echivalentă cu: } g_1 + g_2 = 2g_1g_2.$$

În diagrama de stabilitate, punctele care satisfac această condiție, se află în afara zonei hașurate (fig. 90) și anume pe curbele punctate (ramura pozitivă, respectiv negativă a punctelor confocale), deci corespund unor rezonatori nestabili. Acești rezonatori prezintă interes în construcția laserilor deoarece în cavitate un fascicul se propagă sub forma unui fascicul colimat și apare sub aceeași formă la ieșirea din rezonator.

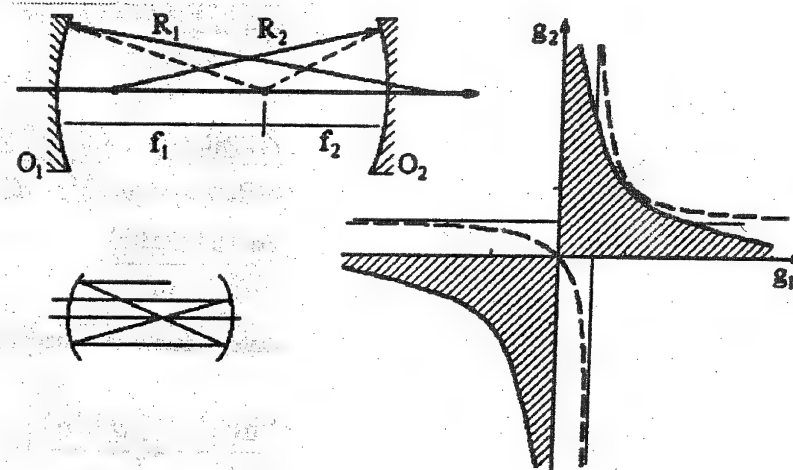


Fig. 90

## 4. Modurile de ordin superior ale unui rezonator optic.

Ecuția de undă paraxială, în afara soluțiilor de forma (2.13 a,b), este satisfăcută și de alte tipuri de soluții care includ forma (2.27) ca un caz particular. Pentru a stabili forma generală a soluțiilor, să acceptăm o soluție de forma:

$$(4.1) \quad \tilde{E}(x, y, z) = N g \left[ \frac{x}{w(z)} \right] h \left[ \frac{y}{w(z)} \right] \exp[iP(z)] \exp \left[ \frac{ik(x^2 + y^2)}{2q(z)} \right],$$

unde semnificația mărimilor  $q(z)$  și  $w(z)$  este descrisă de relațiile (2.21, 2.23 b). Dacă sunt îndeplinite condițiile:

$$P(z) = p(z) \text{ și } g \left[ \frac{x}{w(z)} \right] = h \left[ \frac{y}{w(z)} \right] = 1,$$

relația (4.1) se reduce la relația (2.27). Forma argumentului funcțiilor  $g$  și  $h$  evidențiază faptul că dimensiunea spotului  $w(z)$  reprezintă un factor de scalare a distribuției intensității în spotul fascicului descris de relația (4.1).

Pentru a rezolva problema propusă este necesar să se stabilească expresia funcțiilor  $g$ ,  $h$  și  $P$  în așa fel încât forma (4.1) să fie o soluție a ecuației paraxiale. Dacă se notează:



$$(4.2) \quad a) \quad \xi = \frac{x}{w(z)} \quad \text{și} \quad b) \quad \eta = \frac{y}{w(z)},$$

atunci pot fi scrise relațiile:

$$\frac{\partial g(\xi)}{\partial x} = \frac{dg(\xi)}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{1}{w(z)} \frac{dg(\xi)}{d\xi}, \quad \text{de unde:} \quad \frac{\partial^2 g(\xi)}{\partial x^2} = \frac{1}{w(z)^2} \frac{d^2 g(\xi)}{d\xi^2},$$

$$\frac{\partial g(\xi)}{\partial z} = \frac{dg(\xi)}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial z} = -\frac{1}{w(z)^2} \frac{dw(z)}{dz} \frac{dg(\xi)}{d\xi}$$

și în mod analog pentru funcția  $h(\eta)$ . Aceste rezultate, folosite în ecuația de undă paraxială, conduc la ecuația:

$$\frac{1}{g(\xi)} \left[ \frac{d^2 g(\xi)}{d\xi^2} - 4\xi \frac{dg(\xi)}{d\xi} \right] + \frac{1}{h(\eta)} \left[ \frac{d^2 h(\eta)}{d\eta^2} - 4\xi \frac{dh(\eta)}{d\eta} \right] + \left( \frac{i2k}{q(z)} - 2k \frac{dP(z)}{dz} \right) w(z)^2 = 0$$

Deoarece fiecare termen separat al acestei ecuații este funcție de variabilele  $\xi$ ,  $\eta$ , respectiv  $z$ , pentru a satisface ecuația este necesar ca fiecare să reprezinte o mărime constantă:

$$(4.3) \quad \begin{aligned} a) \quad & \frac{1}{g(\xi)} \left[ \frac{d^2 g(\xi)}{d\xi^2} - 4\xi \frac{dg(\xi)}{d\xi} \right] = -a_1, \\ b) \quad & \frac{1}{h(\eta)} \left[ \frac{d^2 h(\eta)}{d\eta^2} - 4\xi \frac{dh(\eta)}{d\eta} \right] = -a_2, \\ c) \quad & \left( \frac{i2k}{q(z)} - 2k \frac{dP(z)}{dz} \right) w(z)^2 = a_1 + a_2. \end{aligned}$$

Prin urmare problema rezolvării ecuației de undă paraxiale se reduce la rezolvarea a trei ecuații diferențiale ordinare (cu variabile separate).

Dacă se efectuează schimbarea de variabile:

$$(4.4) \quad u = \sqrt{2}\xi,$$

atunci:

$$\frac{\partial g(\xi)}{\partial x} = \frac{dg(\xi)}{du} \frac{\partial u}{\partial x} = \sqrt{2} \frac{dg(\xi)}{du}, \quad \text{respectiv:} \quad \frac{\partial^2 g(\xi)}{\partial x^2} = 2 \frac{d^2 g(\xi)}{du^2},$$

obținându-se o ecuație diferențială de o formă cunoscută (întâlnită de ex. la rezolvarea problemei oscilatorului armonic în mecanica cuantică):

$$(4.5) \quad \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} - 2u \frac{dg}{du} + \frac{a_1}{2} g = 0.$$

Ecuația (4.5) prezintă o soluție finită pentru  $u \rightarrow \infty$  ( $\xi \rightarrow \infty$ , adică  $x \rightarrow \infty$ ), numai dacă constanta  $a_1$  satisface condiția:

$$\frac{a_1}{2} = 2m, \quad \text{unde: } m = 0, 1, 2, \dots$$

Soluțiile permise ale ecuației (4.5) sunt reprezentate prin polinoamele Hermite, prin urmare:

$$(4.6) \quad g\left[\frac{x}{w(z)}\right] = H_m\left[\sqrt{2} \frac{x}{w(z)}\right], \quad h\left[\frac{y}{w(z)}\right] = H_n\left[\sqrt{2} \frac{y}{w(z)}\right],$$

unde:  $m, n = 0, 1, 2, \dots$

Relativ la funcția  $P(z)$ , dacă se folosesc relațiile (2.22, 2.24 a, 2.24 b), ecuația diferențială (4.3 c) poate fi scrisă sub forma:

$$(4.7) \quad \frac{dP(z)}{dz} = \frac{iz}{z_R^2 + z^2} - \frac{z_R(m+n+1)}{z_R^2 + z^2},$$

care conduce la:

$$(4.8 a) \quad P(z) = i \ln \sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_R}\right)^2} - (m+n+1)\phi(z),$$

sau:

$$(4.8 b) \quad \exp[iP(z)] = \frac{\exp[-i(m+n+1)\phi(z)]}{\sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_R}\right)^2}} = \frac{w_0}{w(z)} \exp[-i(m+n+1)\phi(z)]$$

Expresia fazorului componentei electrice, soluție a ecuației de undă paraxială,

este:

$$(4.9)$$

$$E_{m,n}(x, y, z) = \frac{Nw_0}{w(z)} H_m \left[ \sqrt{2} \frac{x}{w(z)} \right] H_n \left[ \sqrt{2} \frac{y}{w(z)} \right] \times \\ \exp \left[ -\frac{x^2 + y^2}{w(z)^2} \right] \exp \left[ \frac{ik(x^2 + y^2)}{2R(z)} \right] \exp \left\{ i \left[ kz - (m+n+1) \arctan \left( \frac{z}{z_R} \right) \right] \right\}$$

Din această relație rezultă:

- dacă  $m = n = 0$ , relația (4.9) conduce la relația (2.27) care descrie distribuția câmpului în modul de oscilație fundamental (modul de "ordin zero");

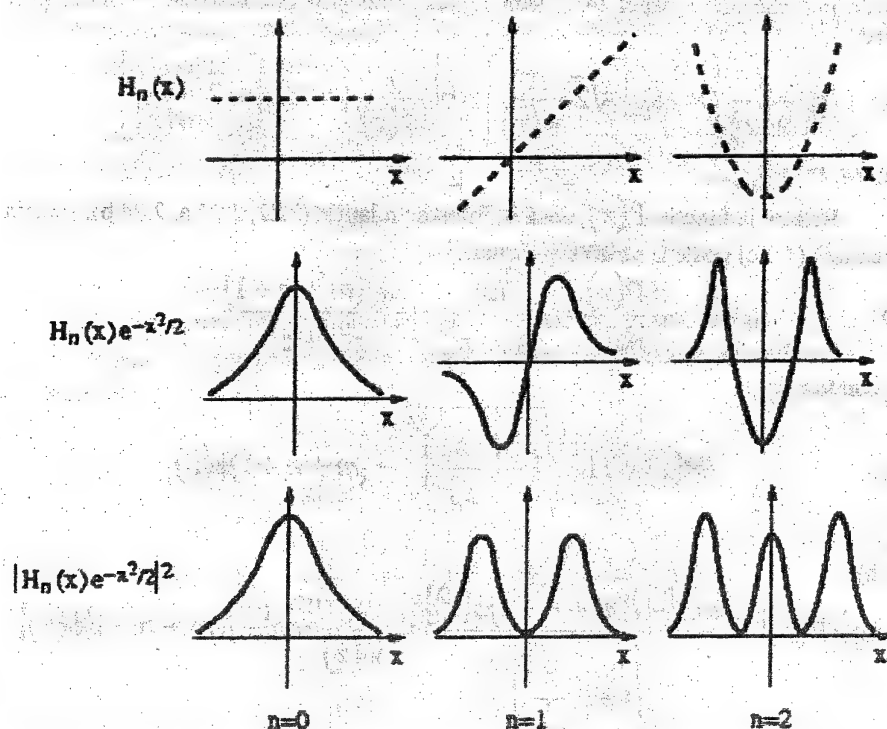


Fig. 91

- pentru fasciculul gaussian mărimile  $R(z)$  și  $w(z)$  nu depind de ordinul  $m$  sau  $n$ ; indiferent de ordin, fasciculele gaussiene sunt caracterizate prin aceeași parametri  $R(z)$  și  $w(z)$ , prin urmare un fascicul gaussian de un ordin  $(m, n)$  dat, la propagarea prin spațiul liber sau la transmiterea lui prin elemente optice, nu-și modifică ordinul, ci numai parametrul  $\tilde{q}(z)$ ;

- deoarece, pentru un rezonator optic dat, fasciculele gaussiene de diferite ordine  $(m, n)$  sunt caracterizate prin aceeași rază de curbura, iar dimensiunea spotului depinde numai de factorul de scalare, acestea pot reprezenta moduri de oscilație ale unui rezonator optic stabil, dacă satisfac condițiile  $(a_1, a_2) \gg w_1, w_2$ .

Modurile gaussiene caracterizate prin valori diferite  $(m, n)$  sunt cunoscute sub denumirea de *moduri transversale*, deoarece distribuția intensității în spotul lor depinde de valorile  $(m, n)$ , în timp ce modurile asociate la diferite valori  $q$ , pentru valori  $(m, n)$  date, nu depinde de valoarea  $q$  și sunt cunoscute sub denumirea de *moduri longitudinale*. Aceste moduri se notează prin simbolul  $TEM_{qmn}$ .

Din relația (4.9) rezultă că mărimea fazorului fascicului gaussiano-sferic, pentru o pereche de numere  $(m, n)$ , este determinată de forma corespunzătoare a polinoamelor lui Hermite. Expresia funcției care generează polinoamele Hermite are forma:

$$H_n(x) = (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n} e^{-\frac{x^2}{2}}, \text{ de unde rezultă:}$$

$$H_0(x) = 1, \quad H_2(x) = 4x^2 - 2$$

$$H_1(x) = 2x, \quad H_3(x) = 8x^3 - 12x.$$

În fig. 91 este prezentată, pentru valorile  $n = 0, 1, 2$ , graficul funcției Hermite

$H_n(x)$ , precum și cel al funcției  $H_n(x)e^{-x^2/2}$ . Deoarece experimental se măsoară o mărime proporțională cu pătratul fazorului intensității câmpului electric, în fig. 91 este prezentat și graficul funcției  $|H_n(x)e^{-x^2/2}|^2$ . Atât din relația de definiție, cât și din

imaginea grafică (fig. 91), rezultă că polinoamele Hermite marcate prin numere *pare* sunt *simetrice* față de variabila  $x$ , în timp ce cele marcate prin numere *impare* sunt *antisimetrice*. Cazului  $(m = 0, n = 0)$  (fig. 92) îi corespunde modul de oscilație "cu ordinul cel mai mic", care corespunde modului gaussian prezentat în prg. 2. Un polinom Hermite de ordinul  $m$  este caracterizat prin  $m$  noduri, respectiv  $(m-1)$  maxime (loburi), cele exterioare prezentând intensitatea maximă.

Într-un plan  $(x, y)$ , perpendicular la direcția de propagare a fascicului (axa optică a rezonatorului), intensitatea energetică a fascicului corespunzător unui mod de oscilație de ordin superior reprezintă o combinație a distribuției intensităților pe cele două direcții reciproc perpendiculare, corespunzător ordinilor polinoamelor Hermite (de ex. modurile  $TEM_{00}$ ,  $TEM_{01}$  sau  $TEM_{10}$ ,  $TEM_{11}$ , ...). Rezultatul acestor

combinații este prezentat în fig. 92 pentru modurile  $TEM_{00}$ ,  $TEM_{11}$  și  $TEM_{22}$ . În această figură limita domeniului prezentat reprezintă distanța față de axa optică unde intensitatea energetică scade de  $e^2$  ori față de intensitatea maximă. În cazul modului de oscilație  $TEM_{00}$  intensitatea maximă este localizată de-a lungul axei optice, iar în cazul celorlalte moduri ( $TEM_{11}$ , respectiv  $TEM_{22}$ ) aceasta este localizată în interiorul "petelor" prezentate în fig. 92.

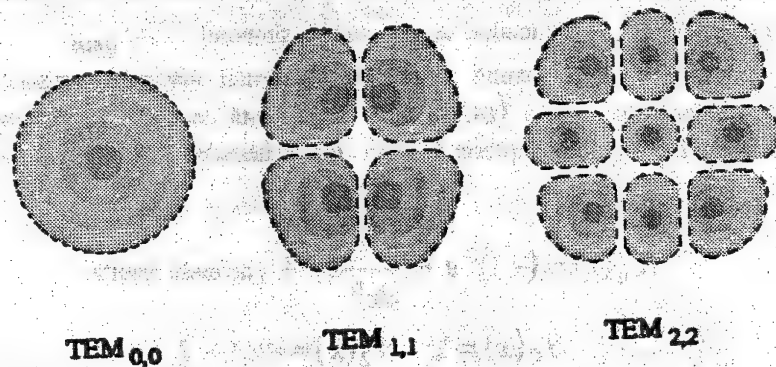


Fig. 92

Se observă că, de ex. distribuția intensității componente electrice a câmpului  $em$  în interiorul rezonatorului optic, în cazul modului de oscilație  $TEM_{11}$ , prezintă două planuri nodale, reciproc perpendiculare (după axele  $x$ , respectiv  $y$ ). Prin urmare în cazul acestui mod de oscilație structura câmpului din interiorul rezonatorului este formată din patru "fuse", fiecare fiind dispus în câte un cadran, despărțite de planurile nodale. În cazul modului  $TEM_{22}$  structura câmpului este mult mai complexă. De-a lungul axei optice apare un "fus" de intensitate mică (vezi fig. 91) însoțit de alte opt "fuse", toate fiind despărțite de două planuri nodale după direcția  $x$ , respectiv două plane nodale după direcția  $y$ .

Combinațiile de tipul  $TEM_{mn}$  (unde  $m \neq n$ ) sunt mai complicate. Atrage atenția modurile  $TEM_{10}$  și  $TEM_{01}$  care se evidențiază prin combinația liniară  $TEM_{10} + TEM_{01}$  (deoarece cele două moduri sunt degenerate după frecvență), care formează un mod circular simetric, cu un nod de-a lungul axei optice, cunoscut în literatură sub denumirea de "doughnut" ("cocă cu alune"). În general acesta este un mod de oscilație nedorit, de aceea se urmărește înlăturarea acestuia.

Modurile gaussiene prezintă o simetrie rectangulară, care, în cazul unor oglinzi cu secțiune circulară, apare ca fiind inacceptabilă. În practică, o mică dezaliniere a

oglinzilor sau prezența unor "perturbații" (de ex. prezența în rezonator a unor ferestre tip Brewster), conduce la formarea modurilor cu simetrie rectangulară, în defavoarea celor cu simetrie circulară.

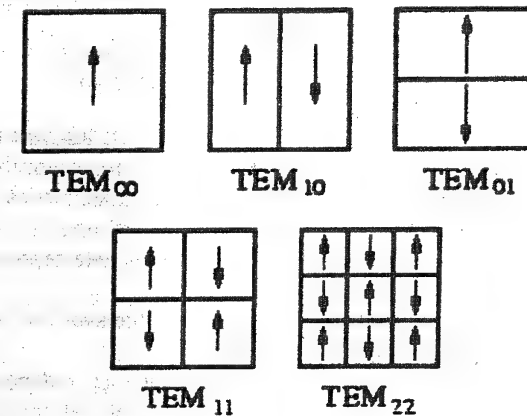


Fig. 93

În cazul simetriei rectangulare componenta electrică a câmpului  $em$  este liniar polarizată, direcția de acțiune a acestei componente fiind diferită în "fuse" diferite ale modului de oscilație. În fig. 93 este prezentată direcția de acțiune a componente electrice în cazul modurilor  $TEM_{00}$ ,  $TEM_{01}$ ,  $TEM_{10}$ ,  $TEM_{11}$  și  $TEM_{22}$ .

#### 4.1 Frecvența modurilor de oscilație ale fasciculelor gaussiene

După cum s-a stabilit, un mod de oscilație reprezintă o distribuție spațială, staționară în timp, a puterii (a pătratului fazorului componente electrice a câmpului  $em$ ) formată în interiorul rezonatorului. Distribuția spațială reprezintă rezultatul interferenței celor două unde care se propagă în rezonator în sensuri opuse. Considerând drept referențial faza intensității câmpului componente electrice reflectate la nivelul unei oglinzi, dacă după un ciclu dute-vino între oglinzile rezonatorului variația fazei este egală cu produsul dintre ordinul  $q$  (număr întreg) al modului de oscilație și valoarea  $2\pi$ , atunci componenta electrică a câmpului  $em$  este în rezonanță cu cavitatea rezonatorului optic, iar în rezonator, ca rezultat al interferenței, se formează distribuția spațială staționară în timp, cunoscută sub denumirea de undă staționară.

Condiția de rezonanță se poate scrie sub forma:

$$(4.10) \quad 2k_q L = q2\pi, \text{ de unde: } L = q \frac{\lambda_q}{2} = q \frac{\pi c}{\omega_q}$$

Frecvența modului de oscilație (a componente electrice a câmpului  $em$  care este în rezonanță cu cavitatea rezonatorului) este:



$$(4.10') \quad \nu_q = q \frac{c}{2L} = q \Delta \nu_{\text{axial}},$$

deoarece intervalul, exprimat în unități de frecvență, dintre frecvența a două moduri vecine este:

$$(4.11) \quad \nu_{q+1} - \nu_q = \frac{c}{2L} = \Delta \nu_{\text{axial}}.$$

Intervalul în frecvență este cu atât mai mic cu cât lungimea rezonatorului este mai mare și, după cum se cunoaște, dacă lungimea rezonatorului tinde la infinit, structura discretă în frecvență a modurilor de oscilație caracteristică rezonatorului finit, trece în structura continuă a modurilor caracteristică câmpului *em* extins în spațiul infinit. În acest caz un mod de oscilație al câmpului *em* este reprezentat printr-o undă armonică, de diferite tipuri.

Să analizăm frecvența modurilor de oscilație transversale, atașate unui mod de oscilație axial.

Din cauza existenței deplasării de fază Guoy și a dependenței acesteia de ordinul modului hermitic-gaussian, într-un rezonator optic stabil, moduri transversale diferite prezintă frecvențe de rezonanță diferite. Să stabilim expresia frecvenței unui mod rezonant transversal  $(m, n)$  care aparține unui mod axial  $q$ .

Diferența dintre faza câmpului fascicului hermitic-gaussian la nivelul unei oglinzi față de cea de la nivelul celeilalte oglinzi este:

$$(4.12) \quad \phi(z_2) - \phi(z_1) = kL - (m + n + 1)[\Psi(z_2) - \Psi(z_1)],$$

$$\text{unde: } \tan \Psi(z_i) = \frac{z_i}{z_R}.$$

Dacă se folosesc expresiile (3.3) de poziționare ale oglinzilor rezonatorului față de "talie", precum și expresia domeniului Rayleigh, se poate arăta că variația totală a fazei Guoy, de-a lungul lungimii rezonatorului este dată de relația:

$$\Psi(z_2) - \Psi(z_1) = \arccos(\pm \sqrt{g_1 g_2}),$$

unde semnul (+) se aplică rezonatorilor pentru care  $(g_1, g_2) > 0$ , iar semnul (-) celor pentru care  $(g_1, g_2) < 0$ .

Condiția de rezonanță pentru unda staționară ce se formează în cavitate, implică faptul că diferența fazelor câmpului la nivelul celor două oglinzi trebuie să fie egală cu un număr întreg de  $\pi$ :

$$\frac{\omega_{q,m,n} L}{c} - (m + n + 1) \arccos[\pm \sqrt{g_1 g_2}] = q\pi,$$

de unde frecvența modului de oscilație transversal, care aparține familiei modului axial  $q$ , este:

$$(4.13) \quad \omega_{q,m,n} = \left[ q + (m + n + 1) \frac{\arccos[\pm \sqrt{g_1 g_2}]}{\pi} \right] \frac{\pi c}{L}.$$

Prin urmare fiecărui mod axial  $q$  îi aparține o familie de moduri transversale  $(m, n)$  a căror frecvență este dată de relația (4.13). Frecvența acestor moduri, față de cea a modului axial, crește odată cu creșterea numerelor  $(m, n)$ , dacă parametrii rezonatorului îndeplinesc condiția  $g_1, g_2 > 0$ , și se micșorează cu creșterea aceluiași numere, dacă parametrii îndeplinesc condiția  $g_1, g_2 < 0$  (fig. 94 a,b).

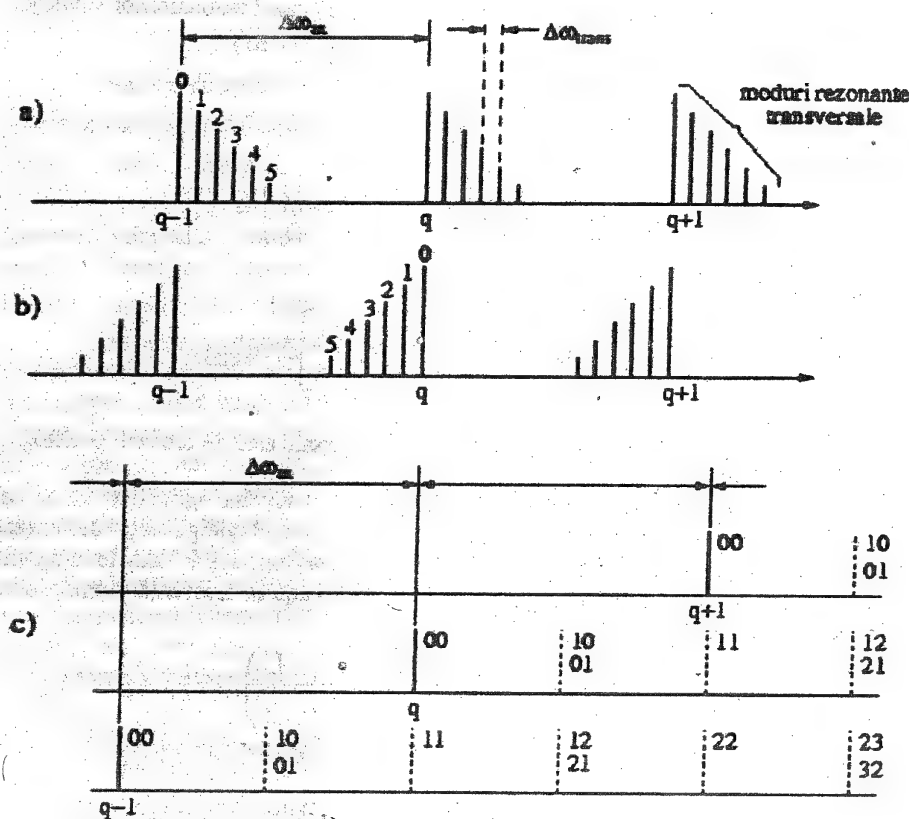


Fig. 94 a,b,c

Intervalul de frecvență dintre două moduri transversale succesive:

$$\frac{\arccos[\pm \sqrt{g_1 g_2}]}{\pi} \Delta \omega_{\text{axial}},$$

este determinat de valoarea parametrilor  $g_1, g_2$ , deci de construcția rezonatorului.

Conform celor prezentate mai sus, deplasarea Guoy a fazei, funcție de tipul rezonatorului este:

$$\frac{\arccos[\pm \sqrt{g_1 g_2}]}{\pi} \equiv \begin{cases} 0 & \text{rezonator "aproape planar"} \quad g_1, g_2 \rightarrow 1 \\ \frac{1}{2} & \text{rezonator "aproape confocal"} \quad g_1, g_2 \rightarrow 0 \\ 1 & \text{rezonator "aproape concentric"} \quad g_1, g_2 \rightarrow -1 \end{cases}$$

Să analizăm frecvența modurilor transversale în cazul rezonatorilor simetrice.

*Cazul rezonatorului aproape planar* ( $R_1, R_2 \rightarrow \infty$ ).

Deoarece  $\frac{L}{R} \ll 1$ , se poate considera:

$$\arccos[\sqrt{g_1 g_2}] \cong \arccos\left(1 - \frac{L}{R}\right) = \alpha,$$

unde  $\alpha \ll \pi$ , deci:

$$(4.14 a) \quad \omega_{q,m,n} = \left[ q + (m+n+1) \frac{\alpha}{\pi} \right] \Delta \omega_{\text{axial}}.$$

Intervalul dintre frecvența modurilor transversale este de ordinul  $\frac{\alpha}{\pi} \Delta \omega_{\text{axial}}$ .

În cazul acestui rezonator atât dimensiunea spotului la nivelul oglinzilor, cât și cea a "taliei" sunt mari, corespunzător, mărimea domeniului Rayleigh față de lungimea rezonatorului va fi mare. Conform fig. 80, la deplasarea frontului de fază de la o oglindă la alta, variația Guoy a fazei este mică, respectiv distanța în frecvență dintre modurile succesive este mică.

*Cazul rezonatorului concentric* ( $R_1 = R_2 = \frac{L}{2}$ ).

Deoarece  $g_1 = g_2 = -1$ , se obține:

$$\arccos[\sqrt{g_1 g_2}] = 0,$$

iar frecvența modurilor transversale de rezonanță devine:

$$(4.14 b) \quad \omega_{q,m,n} = q \Delta \omega_{\text{axial}}.$$

Dacă se consideră rezonatorul aproape concentric se poate afirma că lungimea rezonatorului este mult mai mare decât "talie" fascicului gaussian (care tinde la zero). De aceea se poate accepta faptul că în acest caz, la deplasarea frontului de fază de la o

oglină la alta, trecând prin zona "taliei", variația fazei Guoy este aproape completă (egală cu  $\pi$ ), ceea ce implică faptul că valoarea funcției  $\cos$  trebuie să fie egală cu  $(-1)$  (fig. 80). Din această cauză, conform relației (4.13), în acest caz, frecvența modurilor transversale este situată față de frecvența modului axial  $q$  spre frecvențe mai mici.

*Cazul rezonatorului confocal* ( $R_1 = R_2 = L$ ), adică  $g_1 = g_2 = 0$ , de unde:

$$\arccos[\sqrt{g_1 g_2}] = \frac{\pi}{2},$$

iar frecvența modului de rezonanță este dată de relația:

$$(4.14 c) \quad \omega_{q,m,n} = \left[ q + \frac{m+n+1}{2} \right] \Delta \omega_{\text{axial}}.$$

Din această relație se observă că în acest caz frecvența modurilor transversale simetrice este deplasată față de frecvența modului axial  $q$  cu valori întregi  $\Delta \omega_{\text{axial}}$ , astfel încât coincide exact cu frecvența modului axial următor ( $q+1, q+2, q+3, \dots$ ), în timp ce modurile transversale nesimetrice sunt situate la jumătatea intervalului dintre două moduri succesive (fig. 94 c). De asemenea trebuie subliniat faptul că frecvența modurilor transversale caracterizate prin combinația  $(m, n)$ , respectiv  $(n, m)$  sunt egale, deci aceste moduri sunt degenerate.

Existența modurilor de oscilație a fost evidențiată experimental. Se consideră un dispozitiv laser care oscilează simultan pe două moduri de oscilație (de ex. un mod axial și primul mod transversal sau două moduri transversale succesive). Fascicul de radiație generat de dispozitiv, care conține radiație cu frecvențele celor două moduri, este incident pe un receptor de radiație suficient de rapid. Deoarece radiația optică corespunzătoare celor două moduri prezintă un grad înalt al coerenței spațiale și transversale, apare un tablou de interferență stabil corespunzător fenomenului de bătăi, care poate fi înregistrat de detector. Semnalul electric de la ieșirea fotodetectorului va conține pe lângă o componentă continuă, proporțională cu intensitatea fascicului laser, și o componentă alternativă a cărei frecvență este egală cu diferența celor două frecvențe ale modurilor de oscilație. Deoarece valoarea diferenței este mică, aceasta poate fi vizualizată pe ecranul unui osciloscop.

## 5. Proprietățile fizice ale fascicului gaussian.

Să analizăm modificarea parametrilor fascicului gaussian la propagarea acestuia prin sisteme optice (diafragme, lentile, s.a.).

### 5.1 Diafragmarea unui fascicul gaussian.

Considerăm că un fascicul gaussian este diafragmat de o deschidere circulară cu raza  $r$ , dimensiunea spotului fascicului la nivelul diafragmei fiind egală cu  $w$ . Să analizăm valoarea fluxului (puterii) fascicului ce trece prin diafragmă funcție de valoarea razei deschiderii diafragmei. Puterea fascicului este dată de relația:

$$(5.1) \quad P = \iint |\tilde{u}(r)|^2 dA,$$

iar distribuția radială a intensității energetice a fascicului gaussian caracterizat prin dimensiunea spotului  $w$  este:

$$(5.2) \quad I(r) = \frac{2P}{\pi w^2} e^{-\frac{2r^2}{w^2}}$$

Pe baza acestor relații pot fi analizate mai multe cazuri.

- cazul fascicului echivalent "top hat". Considerăm un fascicul cilindric atașat fascicului gaussian pentru care valoarea intensității energetice în orice punct al secțiunii transversale este egală cu valoarea maximă a fascicului gaussian. Să calculăm diametrul secțiunii fascicului cilindric astfel încât puterea totală care traversează această secțiune să fie egală cu puterea totală a fascicului gaussian. Acest fascicul este cunoscut sub denumirea de fascicul echivalent "top hat" (fig. 95).

În acest caz se obține:

$$d_{TH} = 2r_{TH} = \sqrt{2}w, \text{ respectiv: } A_{TH} = \pi r_{TH}^2 = \frac{\pi w^2}{2}.$$

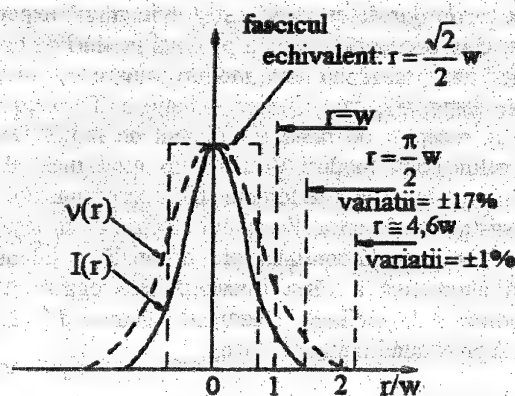


Fig. 95

- diametrul ( $2a$ ) al unei diafragme care permite trecerea unui anumit procent din puterea fascicului gaussian caracterizat prin dimensiunea  $w$  a spotului. Diafragma va obtura domeniul de margine ("aripile") a fascicului gaussian.

$$(5.3) \quad P_{transmis} = \frac{2}{\pi w^2} \int_0^a e^{-\frac{2r^2}{w^2}} 2\pi r dr = 1 - e^{-\frac{2a^2}{w^2}}$$

Relația (5.3) este prezentată grafic în fig. 96.

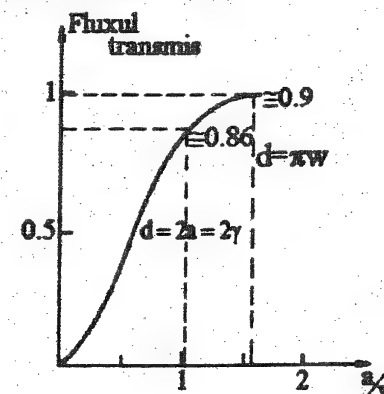


Fig. 96

Dacă  $d = 2a = 2w$  (deschiderea diafragmei se suprapune peste locul geometric al fascicului în care valoarea amplitudinii scade de  $e$  ori față de valoarea maximă), puterea transmisă reprezintă  $\approx 0,86$  din puterea totală ("criteriul  $1/e$ "). Dacă  $2a = \pi w$ , puterea transmisă reprezintă  $\approx 0,99$ , iar dacă  $2a = 3w$  puterea transmisă reprezintă  $\approx 0,989$  din puterea fascicului incident.

La transmiterea unui fascicul printr-o diafragmă (în acest caz - o diafragmă circulară) trebuie considerat fenomenul de difracție pe această deschidere. Acest fenomen determină variații ale distribuției intensității în spotul fascicului transmis. Valoarea relativă a variației depinde de mărimea diametrului deschiderii. Dacă  $2a \geq 4,6w$  valoarea relativă scade sub  $\pm 1\%$ .

## 5.2. Propagarea fascicului gaussiano-sferic prin sisteme optice.

a) În cele prezentate în prg. 2.3, s-a stabilit că la propagarea unui fascicul gaussian, în spațiul liber, nu se modifică caracteristicile acestuia. Valoarea dimensiunii spotului și a razei de curbură se modifică conform relațiilor (2.24 a), respectiv (2.24 b), dar se menține forma de undă sferică. Aceste relații rezultă din relația (2.20) care reprezintă legea de propagare a parametrului  $\tilde{q}$  al fascicului gaussian. Această lege descrie efectul propagării în spațiul liber, adică printr-un "element optic" reprezentat de spațiul liber delimitat de două planuri  $z_1$ , respectiv  $z_2$  distanțate prin intervalul  $z$ ,



dispuse perpendicular la direcția de propagare. Dacă în planul  $z_1$  fasciculul gaussian este caracterizat prin parametrul  $q_1$ , iar în planul  $z_2$  prin parametrul  $q_2$ , între acestea există relația (fig. 97 a'):

$$(5.4) \quad \tilde{q}_2 = \tilde{q}_1 + (z_2 - z_1).$$

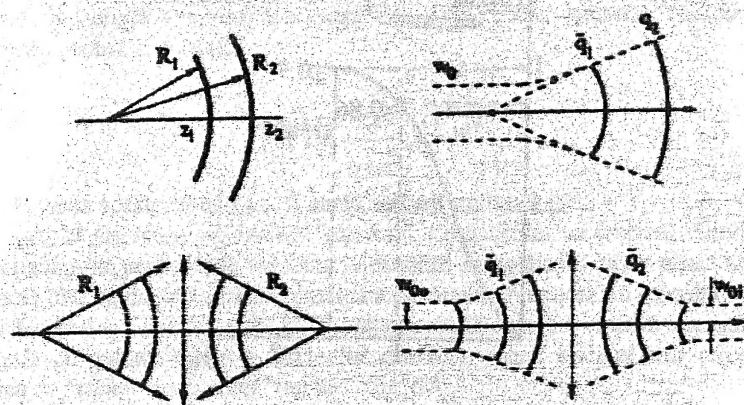


Fig. 97 a,b

Acestui element optic i se poate atașa matricea de transfer de forma:

$$(5.5) \quad \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

care permite identificarea coeficienților  $A$ ,  $B$ ,  $C$  și  $D$ .

Proprietățile unei gaussiano-sferice reprezintă o generalizare a undelor sferice ordinare. Dacă raza de curbură a unei unde sferice, în planul  $z_1$  este egală cu  $R_1$ , atunci în planul  $z_2$ , raza are valoarea (fig. 97 a):

$$(5.4') \quad R_2 = R_1 + (z_2 - z_1).$$

b) Propagarea printr-o lentilă subțire. O undă sferică ordinară care se propagă printr-o lentilă subțire a cărei distanță focală este  $f$ , își modifică raza de curbură a frontului de fază conform relației punctelor conjugate ale lentilelor subțiri (fig. 97 a):

$$(5.6) \quad \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} = \frac{1}{f}.$$

Prin deschiderea lentilei este transmisă partea din frontul de fază care corespunde aperturii acesteia (fluxul de energie care corespunde acestei aperturi), caracterizat prin raza de curbură  $R_1$ ; după lentilă raza de curbură a frontului de fază devine  $R_2$ , schimbându-și semnul funcție de caracteristicile fasciculului de raze optice.

Să analizăm efectul acțiunii aceleiași lentile subțiri asupra unui fascicul gaussian, a cărui dimensiune a "taliei" este  $w_{01}$ . Dimensiunea spotului și raza de curbură reală a fasciculului gaussian în fața lentilei sunt  $w_1$ , respectiv  $R_1$ . Deoarece la trecerea prin lentilă nu se poate modifica distribuția transversală a intensității energetice în spotul fasciculului, imediat după lentilă, dimensiunea spotului trebuie să fie egală tot cu  $w_1$ , însă se modifică raza de curbură a frontului de undă sferic, care devine egală cu  $R_2$ . În mod corespunzător se modifică dimensiunea "taliei", care devine egală cu

$$w_{02}. \text{ Raportul } \frac{w_{02}}{w_{01}}, \text{ corespunde măririi transversale a lentilei (fig. 97 b').}$$

Raza de curbură reală a frontului de fază se poate determina pe baza relației dintre punctele conjugate ale lentilei. Distribuția fazei pe frontul de undă dispus imediat în fața lentilei este aceeași cu a unui front de undă generat de o sursă punctiformă, dispusă pe axa optică, la distanța  $z_{\text{obiect}} = R_1$  față de lentilă, în stânga acesteia (spațiul obiect). Lentila va forma imaginea acestuia, în spațiul imagine, într-un punct dispus pe axa optică la distanța  $z_{\text{imagine}} = -R_2$ , între cele două distanțe existând relația (5.6), în care s-a considerat convenția de semn  $R_1 > 0$ , respectiv  $R_2 < 0$ .

Folosind relația (2.22), se poate exprima raza complexă de curbură  $\tilde{q}_2$  a fasciculului gaussian după trecerea prin lentilă, funcție de raza complexă de curbură a frontului undei din fața lentilei:

$$\frac{1}{\tilde{q}_1} = \frac{1}{R_1} - i \frac{\lambda}{\pi w_1^2}, \text{ iar după lentilă: } \frac{1}{\tilde{q}_2} = \frac{1}{R_2} - i \frac{\lambda}{\pi w_2^2}.$$

Deoarece  $w_1 = w_2$ , pe baza relației (5.6), se obține:

$$(5.7) \quad \frac{1}{\tilde{q}_1} - \frac{1}{\tilde{q}_2} = \frac{1}{f}, \text{ de unde:}$$

$$\tilde{q}_2 = \frac{\tilde{q}_1}{-\frac{1}{f}\tilde{q}_1 + 1}.$$

Relația (5.7), asemănător cu relația (5.4), reprezintă legea de propagare a razei complexe de curbură printr-o lentilă subțire, caracterizată prin matricea de transfer:

$$(5.8) \quad \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{bmatrix}.$$

c) Cazul propagării pe o distanță  $d$ , după care acționează o lentilă. În acest caz, matricea de transfer are forma:

$$(5.9) \quad \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & L \\ -\frac{1}{f} & -\frac{L}{f} + 1 \end{bmatrix},$$

și se obține:

$$(5.10) \quad \tilde{q}_2 = \frac{\tilde{q}_1 + L}{-\frac{1}{f} + 1 - \frac{L}{f}}.$$

d) *Rezonatori optici care conțin în cavitate elemente optice.* Modulile gaussiene stabile se pot forma și în rezonatori mai complecși, de ex. rezonatori care conțin lentile, rezonatori circulari, care prezintă mai mult de două oglinzi, sau rezonatori cu interfețe interne dielectrice. Problema stabilirii profilului corect al fascicului gaussian care să îndeplinească toate condițiile frontului de undă este mai complicată decât în cazul rezonatorului simplu format din două oglinzi, dar poate fi rezolvată prin următoarea metodă.

Sistemului optic complex, în aproximația fascicului paraxial, i se poate atașa matricea de transfer  $[A, B, C, D]$  (fig. 98 a). Legătura dintre parametrii razei optice la ieșirea din sistem și cei de la intrarea este de forma:

$$r_2 = Ar_1 + Br_1' \text{ și } r_2' = Cr_1 + Dr_1'.$$

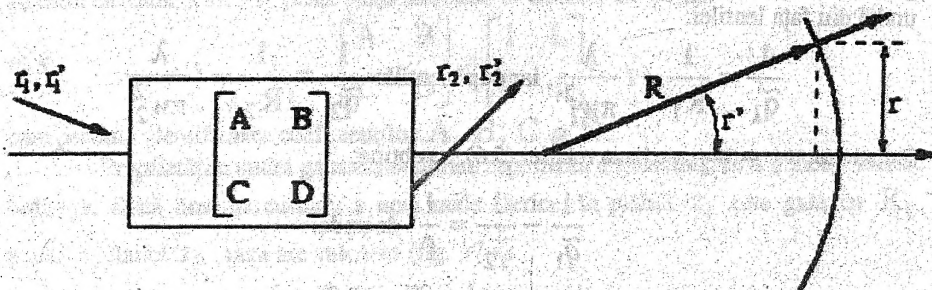


Fig. 98 a,b

Să analizăm propagarea prin acest sistem a unei unde sferice ideale. Deoarece raza optică reprezintă un vector normal la frontul de fază (de undă), legătura dintre raza de curbură  $R$  a frontului de fază și parametrii  $r$  și  $r'$  ai razei optice este de forma (fig. 98 b):

$$r' = \frac{r}{R}, \text{ adică } R = \frac{r}{r'}.$$

Considerând aceste relații, pentru frontul de undă sferic emergent din sistemul optic, se poate scrie:

$$(5.11) \quad R_2 = \frac{r_2}{r_2'} = \frac{Ar_1 + Br_1'}{Cr_1 + Dr_1'} = \frac{AR_1 + B}{CR_1 + D}.$$

Conform celor prezentate mai sus, cel puțin pentru propagarea în spațiul liber sau prin lentile subțiri, raza de curbură complexă  $\tilde{q}$  se supune aceluiași legi ale propagării ca și raza geometrică a frontului de undă. Se poate accepta că relația de forma (5.11) se menține pentru orice sistem optic dacă mărimea  $\tilde{q}$  substituie pe  $R$ . Deci între propagarea razei optice în conceptul opticii geometrice și cea a fascicului gaussian-sferic, care include natura ondulatorie a radiației optice, există o legătură strânsă.

Prin urmare dacă un fascicul gaussian-sferic, caracterizat prin raza complexă de curbură  $\tilde{q}_1$  este incident pe un sistem optic caracterizat prin matricea de transfer  $[A, B, C, D]$ , raza de curbură complexă a fascicului gaussian-sferic emergent este dată de relația:

$$(5.12) \quad \tilde{q}_2 = \frac{A\tilde{q}_1 + B}{C\tilde{q}_1 + D}.$$

Caracteristicile unui mod de oscilație gaussian a oricărui rezonator optic, pentru care se cunoaște matricea  $[A, B, C, D]$ , pot fi stabilite în modul următor. Pentru un mod gaussian stabil, caracterizat într-un punct dat al rezonatorului prin raza de curbură complexă  $\tilde{q}_1$ , după un ciclu complet dute-vino, în același punct, trebuie să se obțină  $\tilde{q}_2 = \tilde{q}_1$ , adică:

$$(5.13) \quad \tilde{q}_2 = \frac{A\tilde{q}_1 + B}{C\tilde{q}_1 + D} = \tilde{q}_1,$$

condiție care conduce la relația:

$$\tilde{q}_1 = \frac{(A - D) \pm \sqrt{(A - D)^2 + 4BC}}{2C}.$$

Această relație, dacă se folosește proprietatea:  $AD - BC = 1$ , conduce la (s-a considerat semnul +):

$$(5.14) \quad \frac{1}{\tilde{q}_1} = \frac{A - D}{2B} - i \sqrt{\frac{4 - (A + D)^2}{4B^2}} = \frac{1}{R_1} - i \frac{\lambda}{w_1^2}.$$

Deoarece dimensiunea  $w_1$  a modului stabil este reală, trebuie îndeplinită condiția:



$$\left(\frac{A+D}{2}\right)^2 \leq 1.$$

În aceste condiții raza reală de curbură a frontului de fază  $R_1$  și dimensiunea spotului  $w_1$ , într-un punct dat al rezonatorului vor fi date de relația (5.14).

## BIBLIOGRAFIE

1. A.E. SIEGMAN, "Lasers", University Science, Mill Valey, Calif., 1986
- A.E. SIEGMAN, "An Introduction to Lasers and Masers", McGraw-Hill, 1971
- A.E. SIEGMAN, "Microwave Solid-State Masers", McGraw-Hill, 1964
2. Peter W. MILONNI, Joseph H. EBERLY, "Lasers", John Wiley and Sons, N.Y., 1988
3. HAKEN, "Light - vol. 1: Wave, Photons, Atoms; vol. 2: Laser Light Dynamics", North-Holland, 1981
4. C.O. WEISS, R. VILASECA, "Dynamics of Lasers", VCH, Weinheim-New York-Basel-Cambridge, 1991
5. W. KOECHNER, "Solid-State Laser Engineering", Springer-Verlag, 1976
6. Murray SARGENT III, Marlan O. SCULLY, Willis E. LAMB Jr., "Laser Physics", Addison-Wesely, 1974
7. A. MAITLAND, M.H. DUNN, "Laser Physics", North-Holland, 1969
8. Orazio SVELTO, "Principles of Lasers", Plenum Press, 1976
9. William S.C. CHANG, "Principles of Quantum Electronics - Lasers: Theory and Applications", Addison-Wesely, 1969
10. A. ORSZAG, "Les Lasers", Masson & Cie", 1968
11. Dan C. Dumitruș, "Lasere cu gaz", Ed. Acad. Române", 1982
12. V. POP, "Bazele opticii", Ed. Univ. "Al. I. Cuza"-Iasi, 1989



# BIBLIOGRAPHY

1. A.E. SIEGMAN, "Laser", University Science, Mill Valley, 1975.
2. A.E. SIEGMAN, "The laser in industry and medicine", McGraw-Hill, 1971.
3. A.E. SIEGMAN, "Micro-wave Solid-State Lasers", McGraw-Hill, 1968.
4. PEARL W. MASON, Joseph H. FERRELL, "Lasers", John Wiley and Sons, N.Y., 1958.
5. J. HAKEN, "Light - vol. 1: Wave, Photon, Atom; vol. 2: Laser Light Dynamics", North-Holland, 1981.
6. C.G. WEISS, R. VILASECA, "Dynamics of Lasers", VCH, Weinheim-New York-Basel-Cambridge, 1991.
7. W. KOEHLER, "Solid-State Laser Engineering", Springer-Verlag, 1976.
8. MURRAY SARGENT III, MARIAN O. SCULLY, WILLIS E. LAMB II, "Laser Physics", Addison-Wesley, 1974.
9. A. MALLAND, M.H. DUNN, "Laser Physics", North-Holland, 1989.
10. G. SVELTO, "Principles of Lasers", Plenum Press, 1976.
11. WILLIAM S.C. CHIAI, "Laser Theory and Applications", World Scientific, 1995.
12. A. ORSZAG, "Laser Theory and Applications", World Scientific, 1995.
13. DAN C. BOHNE, "Laser Theory and Applications", World Scientific, 1995.
14. V. POP, "Bazele fizice ale laserului", Ed. Univ. "Al.I. Cuza", Iasi, 1989.

TIPARUL EXECUTAT LA  
CENTRUL DE MULTIPLICARE AL  
EDITURII UNIVERSITATII "AL. I. CUZA"  
6600 Iasi, Str. Pacurari nr. 9, tel. 032-114947

Format: 70x100/16  
Coli tip: 22,25  
Aparut: 2001  
Comanda: 38

